Lösungsskizze zu den Bonusaufgaben - Blatt 9

Bonusaufgabe 9.5 (*4 Bonuspunkte*)

Geben Sie jeweils mit Begründung an, ob die folgenden Mengen in den jeweiligen Vektorräumen über den jeweiligen Körpern linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$.

(b) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$.

(c) $\{(123, \frac{3}{4}), (\cos\frac{1}{3}, \sin\frac{7}{13}), (\sqrt{17}, -\frac{50}{49}), (\pi, \frac{3\pi}{177})\} \subseteq \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$

(d) $\{2, 1+2X, X^2, 2X^2+X^3, X+2X^3\} \subseteq \mathbb{F}_3[X]$, wobei $\mathbb{F}_3[X]$ den Raum der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_3$ bezeichnet (Vgl. Aufgabe 8.1).

Lösung. (a) Linear abhängig: $\mathbb{R}$ hat Dimension 1 über $\mathbb{R}$ also drei Vektoren sind immer linear abhängig.

(b) Erstmal zeigen wir dass $\{1, \sqrt{2}\}$ l.u. ist. Angenommen nicht, dann existieren $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p + q\sqrt{2} = 0$, also $\sqrt{2} = -p/q \in \mathbb{Q}$. (Man sollte ein oder zwei Fallunterscheidungen machen, wenn eine von p, q null ist, aber das Ergebnis ist immer dasselbe) Das ist ein Widerspruch, weil $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: dazu zeigen wir ein klassisches Argument von Euklid. Angenommen $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Dann $2n^2 = m^2$ also m^2 ist gerade. Das impliziert, dass m auch gerade ist, und somit ist m^2 durch 4 teilbar. Also $2n^2 = 4m'$ und somit $n^2 = 2m'$, d.h., n^2 (und also n) ist auch gerade. Also m und n sind beide gerade, Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

Nun zeigen wir, dass $\sqrt{3}$ keine Linearkombination der andere zwei Vektoren ist. Angenommen $\sqrt{3} = a+b\sqrt{2}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$, dann $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$ also $\sqrt{2} = \frac{3-a^2+2b^2}{ab} \in \mathbb{Q}$. Und das widerspricht was wir oben gezeigt haben.

(c) Linear abhängig: vier Vektoren in einem 2-dimensionalen VR.

(d) Linear abhängig: der letzte Vektor ist Linearkombination der anderen:

$$-\frac{1}{4}(2) + \frac{1}{2}(1 + 2X) - X^2 + 2(2X^2 + X^3) = X + 2X^3$$

□

Bonusaufgabe 9.6 (*3 Bonuspunkte*)

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq ab$. Zeigen Sie, dass $x, y \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $ax + by = n$.

Lösung. Da $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ ist, gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $ax + by = 1$. Wenn wir diese letzte Gleichung mit n multiplizieren erhalten wir $a(xn) + b(yn) = n$ also wir haben $r = xn,\ s = yn \in \mathbb{Z}$ gefunden mit $ar + bs = n$. Wir brauchen aber $r, s \in \mathbb{N}_0$.

Da $a, b \geq 0$ dürfen x, y nicht beide negativ sein, wegen $ax + by = 1$. Wenn sie beide positiv sind, dann sind auch $nx, ny > 0$ und wir sind fertig. Seien also $x < 0$ und $y \geq 0$.

Bemerke, dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(nx + kb)a + (ny - ka)b = n$$

Wir suchen also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{cases} nx + kb \geq 0 \\ ny - ka \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k \geq -\frac{ab+c}{b}x \\ k \leq \frac{ab+c}{a}y \end{cases}$$

Wir brauchen also eine ganze Zahl k im Intervall

$$k \in \left[-\frac{ab+c}{b}x, \frac{ab+c}{a}y\right] \cap \mathbb{Z}.$$

Die gibt es sobald die Länge des Intervalls ≥ 1 ist. Wir berechnen also

$$\frac{ab+c}{a}y + \frac{ab+c}{b}x = \frac{abb + bcy + aab + acx}{ab} = \frac{ab(a+b) + c(ax+by)}{ab} = \frac{ab(a+b)+c}{ab} = a + b + \frac{c}{ab} > 1$$

weil $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ impliziert $a, b \geq 1$.

Also in unserem Intervall liegt mindestens eine ganze Zahl. Wähle eine solche k und setze

$$\bar{x} = nx + kb,\ \bar{y} = ny - ka$$

und $\bar{x},\ \bar{y}$ erfüllen die verlangte Eigenschaften. □