

Exercises for the course “Linear Algebra I”

Sheet 3

Hand in your solutions on Thursday, 14. November 2019, 09:55, in the Postbox of your Tutor in F4. Please try to write your solutions clear and readable, write your name and the name of your tutor on each sheet, and staple the sheets together.

Exercise 3.1 *Beweismechanikaufgabe* (4 points)

Let A and B be sets. Show that $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Hint: For this exercise take into account the **Info zu Beweismechanikaufgaben**, that you find on the ILIAS-webpage of the “Einführung in das mathematische Arbeiten” and on the backside of this sheet (**hand in your solutions separately in the postbox n. 18 and stick to the rules of Beweismechanik**). Refer to the file **Beweismechanik** for mathematical notions and proof steps.

Exercise 3.2 (4 points)

Let p be a prime number and let $a, b \in \mathbb{N}$ be such that $p|ab$. Show that $p|a$ or $p|b$.

Exercise 3.3 *The group of units of a Ring* (4 points)

Let $(R, +, \cdot)$ be a Ring with 1. We define the *group of units* (R^\times, \cdot) of R as the set of all invertible elements of R , i.e.,

$$R^\times = \{x \in R : \exists y \in R : x \cdot y = 1\}.$$

Show that (R^\times, \cdot) is in fact a group.

Exercise 3.4 *The group of units of \mathbb{Z}_n* (4 points)

Let $n \in \mathbb{N}$. Show that

$$\mathbb{Z}_n^\times = \{x \in \{0, \dots, n-1\} : \gcd(x, n) = 1\}.$$

Information zu den Beweismechanik-Aufgaben auf den Übungsblättern der Linearen Algebra I und Analysis I

Die *Beweismechanik* finden Sie auf der ILIAS-Seite der Einführung in das mathematische Arbeiten.

Zur Bearbeitung der Aufgaben Halten Sie sich beim Aufbau und Aufschreiben Ihrer Beweise genau an die Regeln der *Beweismechanik*. Es gilt:

Ihr Beweis ist dann richtig, wenn er nach den Regeln abläuft.

Wenn Sie sich also genau an die Regeln halten, können Sie am Ende sicher sein, dass Ihre Lösung richtig ist. Auf diese Art und Weise gewinnen Sie dann mit der Zeit mehr und mehr Selbstvertrauen in Ihre Beweisfähigkeit.

Wenn Sie eine Regel nicht mehr genau wissen, schlagen Sie diese in der Beweismechanik nach. Mit der Zeit sollten Sie die Regeln natürlich auswendig können.

Wir empfehlen Ihnen, sich das *Beispiel* in der Beweismechanik durchzulesen. In diesem wird die gewünschte Vorgehensweise illustriert (wobei nur der schwarze Text den Beweis ausmacht).

Erlaubte Regeln und Schritte Zu Beginn verlangen wir von Ihnen, dass Sie sehr genau mit den Grundregeln arbeiten, die im ersten Kapitel der Beweismechanik stehen. Später im Semester werden auch zunehmend abgeürzte Vorgehensweisen erlaubt sein, die Sie im zweiten und dritten Kapitel der Beweismechanik finden. Diese Kapitel werden wir im Semsterverlauf ergänzen, was *genau* zum aktuellen Zeitpunkt erlaubt ist, können Sie insofern stets in der aktuellen Version der Beweismechanik entnehmen.

Zur Abgabe der Aufgaben Bitte beachten Sie die folgenden Regeln:

- Abgabe der Beweismechanik-Aufgabe auf einem *separaten* Blatt in den Briefkasten mit der Aufschrift *Beweismechanik*.
- Bitte notieren Sie oben auf Ihrer Abgabe Ihren eigenen Namen, den Namen Ihres Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe.
- Der Abgabezeitpunkt ist derselbe wie für das restliche Blatt.

Sie bekommen die korrigierte Lösung mit dem Rest des Blatts in Ihrer Übungsgruppe zurück. Die Korrektur erfolgt jedoch nicht durch Ihren Tutor.