

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 13

Thema der Präsenzaufgabe

Elementarteiler

Aufgabe 44

(3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}^4$ des linearen Gleichungssystems $Tx = b$ für

$$T = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 8 & -1 \\ 10 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Sei im folgenden A stets ein Hauptidealring.

Aufgabe 45

(2 Punkte)

Seien $S \in A^{m \times n}$ und $T \in A^{n \times r}$. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ und $I \subset [m], K \subset [r]$ mit $|I| = |K| = k$,

$$\det((ST)_{IK}) = \sum_{J \subset [n], |J|=k} \det(S_{IJ}) \det(T_{JK})$$

gilt.

Aufgabe 46

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen gelten:

- (i) Seien $S \in A^{m \times n}$ und $T \in A^{n \times r}$. Dann ist $I_k(ST) \subset I_k(S) \cdot I_k(T)$.
- (ii) Seien $T \in A^{m \times n}$ und $U \in GL_m(A), V \in GL_n(A)$. Dann ist $I_k(T) = I_k(UTV)$.

Aufgabe 47

(2 Punkte)

Sei M ein A -Modul. Seien U, V Untermoduln von M . Zeigen Sie, dass $U/(U \cap V) \cong (U + V)/V$ gilt.

Aufgabe 48

(3 Punkte)

Finden Sie jeweils ein Beispiel für:

- (i) Einen Modul M , der keine nichtleere linear unabhängige Familie besitzt.
- (ii) Einen Modul M und ein minimales Erzeugendensystem, das keine Basis ist.
- (iii) Einen Modul M und eine maximale linear unabhängige Familie, die keine Basis ist.

Begründen Sie ihre Antwort.

Abgabe: Bis Freitag, den 12.7.2019, 9:45 Uhr, in die Briefkästen auf F4.

Webseite: <http://math.uni-konstanz.de/~serra/2019-SS-LinAlg2> und ILIAS

Informationen zur Klausur Die Hauptklausur findet am Donnerstag, den **29.08.2019 ab 8.30 Uhr** im Audimax statt. Vergessen Sie nicht, sich rechtzeitig anzumelden. Eine Teilnahme ohne vorherige Anmeldung wird nicht gestattet.

Die geplante Dauer beträgt 150 Minuten. Es wird sechs Aufgaben mit jeweils 10 Punkten geben, wovon die besten fünf Aufgaben gewertet werden. Es muss also im Vorfeld keine Auswahl getroffen werden. Die zu erreichende Gesamtpunktzahl beträgt 50 Punkte. Inhalt der Hauptklausur sind der Stoff der Vorlesung bis einschließlich Kapitel 10 sowie der Inhalt der Übungen. Neben Rechen- und Theorieaufgaben können auch Definitionen und Beweise aus der Vorlesung abgefragt werden.

Weitere Informationen erhalten Sie zeitnah über ILIAS.