

3 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir beweisen dass die Algebren $K[x]$ (Polynome) und $K[\tilde{x}]$ (Polynomfunktionen) isomorph sind, wenn der Körper K unendlich ist. Wir werden für den Beweis Lagrange Interpolationsformel brauchen. Für den Beweis von LIF werden wir wiederum Du-balbasen (LA I Skript 22) benötigen. In Abschnitt 3 setzen wir unsere Untersuchung von $K[x]$ fort. Diese Resultate werden in Kapitel II, und insbesondere in Kapitel III benötigt.

Sei $V := K[x]_{\leq n}$ der K -Vektorraum der Polynome mit $\deg \leq n$ (zusammen mit 0 Polynom). Wir bemerken: $\dim V = n + 1$, weil e.g. $\{x^0, \dots, x^n\}$ eine Basis bildet.

Satz 3.0 (Lagrange Interpolation):

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper, t_0, t_1, \dots, t_n $n + 1$ verschiedene Elemente aus K .

Für $0 \leq i \leq n$, sei $L_i := L_{t_i} \in V^*$ so definiert: $L_i(f) := f(t_i)$.

Dann ist $\{L_0, \dots, L_n\}$ eine Basis für V^* .

Beweis:

Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \dots, P_n\}$ von V zu finden. Solch eine Basis ist bestimmt durch die Gleichungen $L_j(P_i) = \delta_{ij}$ $0 \leq i, j \leq n$ (*)

Wir wollen also P_0, \dots, P_n konstruieren, die (*) erfüllen.

Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

Prüfen Sie, dass diese tatsächlich (*) erfüllen. (Siehe Übungsblatt). Darüberhinaus gilt für alle

$$f \in V : f = \sum_{i=0}^n f(t_i) P_i. \quad \square$$

Definition 3.1.

Seien \mathcal{A} und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K . Eine Bijektion $\sim: \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}; \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ist eine *Algebren-Isomorphie*, falls $(c\alpha + d\beta) = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$ und $(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) = \tilde{(\alpha\beta)}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}, c, d \in K$ gelten.

In Definition 2.6 haben wir für ein Polynom $f \in K[x]$ die Polynomfunktion \tilde{f} definiert. Wir beweisen nun:

Satz 3.2.

Sei der Körper K unendlich. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \Phi : K[x] & \longrightarrow & K[x]^\sim \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

eine K -Algebren-Isomorphie.

Beweis:

Es ist unmittelbar zu prüfen, dass $\widetilde{f + cg} = \tilde{f} + c\tilde{g}$ und $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$. Die Abbildung ist per Definition surjektiv. Ist sie Injektiv? D.h. $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?

Seien $\deg f = n$ und t_0, \dots, t_n verschiedene Elemente in K . Seien P_0, \dots, P_n und schreibe $f = \sum f(t_i) P_i$ wie in LIF. Wenn $\tilde{f} = 0$, dann gilt insbesondere für alle $i = 0, \dots, n$ dass $f(t_i) = 0$. D.h. alle Koeffiziente von f sind Null, und somit ist $f = 0$ das Nullpolynom. \square

§ 3 Ideale

In Satz 2.1(i) haben wir schon bewiesen dass $K[x]$ ein Integritätsbereich ist, und erfüllt die Kürzungsregel

$f, g, h \in K[x] : f \neq 0$ und $fg = fh \Rightarrow g = h$ (Korollar 2.3). Wir beweisen nun den Divisionsalgorithmus in $K[x]$. Wir benötigen ein Hilfslemma:

Lemma 3.3.

Seien $f, d \neq 0$ mit $\deg d \leq \deg f$. Es gibt ein $g \in K[x]$, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$.

Beweis:

Schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$.

$$f = a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \quad a_m \neq 0$$

$$d = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \quad b_n \neq 0$$

Betrachte $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} (b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i) = a_m x^m + \dots$.

Also ist $f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \neq 0$ und $\deg(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d) < \deg f$.

Setze also $g := (\frac{a_m}{b_n}) x^{m-n}$. □

Satz 3.4. (Divisionsalgorithmus):

Seien $f, d \in K[x]$, $f, d \neq 0$; $\deg d \leq \deg f$. Dann gibt es $q, r \in K[x]$, so dass

(i) $f = dq + r$ wobei

(ii) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner sind q, r durch (i) und (ii) eindeutig definiert.

Beweis:

Existenz: Sei $f \neq 0$ und $\deg d \leq \deg f$. Lemma 3.3 ergibt, dass ein $g \in K[x]$ existiert, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$.

Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg(f - dg) \geq \deg d$, folgt wieder aus Lemma 3.3, dass ein $h \in K[x]$ existiert, so dass $(f - dg) - dh = 0$ oder $\deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg)$.

Die Fortsetzung ergibt $\dots < \deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg) < \deg f$.

Die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit $f = dq + r$.

Eindeutigkeit: Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$ mit $r_1 = 0$ oder $\deg r_1 < \deg d$.
 $q - q_1 \neq 0 \Rightarrow d(q - q_1) \neq 0$ und $\deg(r_1 - r) = \deg d + \deg(q - q_1)$.
Aber $\deg(r_1 - r) \leq \max(\deg r_1, \deg r) < \deg d$ - ein Widerspruch.
So $q - q_1 = 0$ und damit $r_1 - r = 0$.

Definition 3.5.

Seien $f, d \in K[x]; d \neq 0$. Wir sagen dass d teilt f oder f ist durch d teilbar oder f ist ein Vielfaches von d , wenn Divisionsalgorithmus $r = 0$ ergibt, d.h. : $f = dq + 0$. In dem Fall heißt q Quotient.

Diesen Begriff von Teilbarkeit in $K[x]$ werden wir in Skript 4 weiter untersuchen und ausnutzen.