# 4 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

**Prof. Dr. Salma Kuhlmann**

*In diesem Skript werden wir Nullstellen von Polnomen und deren Vielfachheit studieren. Insbesondere werden wir in Abschnitt 4 Taylor's Formel lernen und beweisen. TF wird dann eingesetzt, um die Vielfachheit zu bestimmen. Diese Begriffe werden wir u.a. in Skripte 12 und 13 (Kapitel III; Normalformen) benötigen.*

**Korollar 4.1.**
Seien $f \in K[x]; c \in K$. Es gilt: $(x-c)$ teilt $f$ genau dann, wenn $f(c) = 0$.

**Beweis:** Divisionsalgorithmus liefert $q, r$ so dass $f = (x-c)q + r; r = 0$ oder deg $r < 1$. Also ist $r$ ein Skalarpolynom, und $f(c) = r(c) = r$. Insbesondere ist $r = 0$ genau dann, wenn $f(c) = 0$. □

**Definition 4.2.**
Seien $f \in K[x]; c \in K$, dann ist $c$ eine *Nullstelle* von $f$ , wenn $f(c) = 0$. Abbreviation: "NS von $f$ in $K$". Das heisst, $c$ ist Nullstelle von $f$ genau dann, wenn $(x-c)$ teilt $f$.

**Korollar 4.3.**
Sei $f \in K[x]$ mit deg $f = n$. Dann hat $f$ höchstens $n$ Nullstellen in $K$.

**Beweis:** Wir beweisen per Induction nach $n$.

• Induktionsanfang: wir prüfen gleich für $n = 0$ (und $n = 1$.) Wenn $n = 0$ dann ist $f = c$ ein Skalarpolynom, und $c \neq 0$. Dann hat $f$ gar keine Nullstelle in $K$. Wenn $n = 1$, dann $\exists a, c \in K, a \neq 0, s.d. f = ax + c$. Klar gilt $ax + c = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{-c}{a}$, und damit ist $\frac{-c}{a}$ die eindeutige Nullstelle.

• Induktionsannahme: Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $n-1$ gilt.

• Induktionschritt: Sei $a$ eine Nullstelle von $f$ in $K$. Dann gibt es $q \in K[x]$ so dass $f = (x-a)q; \qquad \text{deg } q = n-1$.
Sei $b \in K$. Nun ist $f(b) = 0$ genau dann, wenn $b = a$ oder $b$ ist Nullstelle von $q$ in $K$.
Induktionsannahme $\Rightarrow$ $q$ hat höchstens $(n-1)$ Nullstellen, also hat damit $f$ höhstens $n$ Nullstellen. □

# § 4 Formale Ableitungen

**Notation 4.0:**

Sei $f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$. Setze:
$f^{(0)} = f := D^0 f$ (Konvention) und
$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1} := D^1 f = Df$
$f^{(2)} = f'' = D^2 f := D(D(f))$
$f^{(3)} = D^3(f)$,
usw.

**Bemerkung 4.4.**
Für $f, g \in K[x]$ und $c \in K$ gilt: $D(f + cg) = D(f) + cD(g)$. So ist $D : K[x] \longrightarrow K[x]$ ein linearer Operator. (Siehe auch ÜB 10; LA I). Allgemeiner gilt für $n \in \mathbb{N}_0$: $D^n$ ist ein linearer Operator.

**Satz 4.5. (Taylor's Formel)**
Seien Char $(K) = 0; n \in \mathbb{N}_0, a \in K, p \in K[x]$ und deg $p \leq n$.
Es gilt: $p = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a)\frac{1}{i!}(x-a)^i$ $(*)$

**Beweis:**
(Die Beweisidee ist wie für LIF). Sei $V$ der $K$-Vektorraum der Polynome von deg $\leq n$ (und das 0 Polynom).
Für alle $i = 0, \ldots, n$, definiere $l_i : V \longrightarrow K$ ; $l_i \in V^*$ , durch: $l_i(p) := p^{(i)}(a)$ .
Setze $p_i := \frac{1}{i!}(x-a)^i$. Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe Übungsblatt).
Also sind $p_0, \ldots, p_n$ und $l_0, \ldots, l_n$ zueinander Dual-Basen von $V$ und $V^*$.
Also $p = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} l_i(p)p_i$. □

**Bemerkung 4.6.**
(1) $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$ sind linear unabhängig. Also ist diese lineare Kombination $(*)$ eindeutig.

(2) Char $(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

**Definition 4.7.**
Sei $f \neq 0$ und $c \in K$ eine Nullstelle von $f$ in $K$. Die *Vielfachheit* von $c$ ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $(x-c)^\mu$ teilt $f$,
**Bemerke:** $1 \leq \mu \leq \deg f$.

**Satz 4.8.**
Seien Char $(K) = 0, f \neq 0, \deg f \leq n$ und $c \in K$ ist eine Nullstelle von $f$.
Es gilt: $c$ hat die Vielfachheit $\mu$ genau dann, wenn
$f^{(k)}(c) = 0$ bei $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $f^{(\mu)}(c) \neq 0$ (†)

**Beweis:**

"$\Rightarrow$" $(x-c)^\mu$ teilt $f$ und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt $f$ nicht. Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x-c)^\mu g$.
**Bemerke:** $\deg g \leq n - \mu$ und $g(c) \neq 0$.

Die Taylor Formel liefert:
$f = (x-c)^\mu \big[ \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^m}{m!} \big]$. Also $f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$.

Da die Koeffizienten von $f$ als lineare Kombination von $(x-c)^k (0 \leq k \leq n)$ eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!} =$$

$$g^{(0)}(c) \frac{(x-c)^\mu}{0!} + \cdots + g^{(n-\mu)}(c) \frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!}. \qquad (\dagger\dagger)$$

Also $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0$ für $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$ für $\mu \leq k \leq n$.

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$.

"$\Leftarrow$" $(*)$ und $(\dagger\dagger)$ liefern $f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}$.

$$\text{Also } f = (x-c)^\mu \underbrace{\Big[ \frac{f^\mu(c)}{\mu!} + \frac{f^{\mu+1}(c)}{\mu+1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu} \Big]}_{:= g}$$

$$g(c) = \frac{f^\mu(c)}{\mu!} \neq 0.$$

Also $f = (x-c)^\mu g$ mit $g(c) \neq 0$.
Wir behaupten nun: $(x-c)^{\mu+1}$ teilt $f$ nicht, sonst hätten wir $h \in K[x]$
mit $f = (x-c)^{\mu+1} h = (x-c)^\mu (x-c) h = (x-c)^\mu g$.
$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow g = (x-c)h$. Also $g(c) = 0$. Ein Widerspruch. $\square$