8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im Abschnitt 7 werden wir den Begriff "m-lineare Formen" einführen (eine natürliche Verallgemeinerung vom Begriff "lineare Funktionale") und in Abschnitt 8 werden wir besondere m-lineare Formen studieren. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwending.

§ 7 Multilineare Formen

Definition 8.1.
Sei K ein Körper und seien U, V K-Vektorräume.

$$\beta : U \times V \longrightarrow K$$
$$(x, y) \longmapsto \beta(x, y)$$

ist eine *bilineare Funktionale* (oder bilineare Form), falls gelten:

(1) $\beta(c_1x_1 + c_2x_2, y) = c_1\beta(x_1, y) + c_2\beta(x_2, y)$ und

(2) $\beta(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\beta(x, y_1) + d_2\beta(x1, y_2)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U$ und $y, y_1, y_2 \in V$ und $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Beispiel 8.2.
$V \times V^* \longrightarrow K$
$(x, f) \longmapsto [x, f]$, wobei $[x, f] := f(x)$.
Die definierenden Eigenschaften und Verknüpfungen in V^* liefern

(1) $[c_1x_1 + c_2x_2, f] = c_1[x_1, f] + c_2[x_2, f]$ und

(2) $[x, d_1f_1 + d_2f_2] = d_1[x, f_1] + d_2[x, f_2]$.

Notation
$L^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$. Sie ist ein Vektorraum (mit den Verknüpfungen $(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)(x, y) := c_1\beta_1(x, y) + c_2\beta_2(x, y)$ wie üblich).

Definition 8.3.
Seien $m \in \mathbb{N}$ und $V_1, \ldots, V_m$ K-Vektorräume. Eine *m-lineare Funktionale* (Form) (oder multilineare Funktionale vom Grad m) auf $V_1 \times \cdots \times V_m$ ist eine Abbildung $\mu : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow K$, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{rcll} \mu(\alpha_1, \ldots, & c\alpha_i + \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & = \\ c\mu(\alpha_1, \ldots, & \alpha_i & , \ldots, \alpha_m) & + \\ \mu(\alpha_1, \ldots, & \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & \end{array}\right\} \text{ für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i; c \in K.$$

Notation
$L^{(m)}(V_1 \times \cdots \times V_m; K) \coloneqq K$-Vektorraum der m-linearen Formen.

Bemerkung 8.4.
Sei μ multilinear. Wenn $\alpha_i = 0$ (für irgendein i), dann gilt $\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m) = 0$.

§ 8 Alternierende multilineare Formen auf K^n

Definition 8.5.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n\text{-mal}} \longrightarrow K$$

ist *alternierend* wenn für alle $(z_1, \dots, z_n)$ wofür es $i \neq j$ gibt mit $z_i = z_j$, gilt $\delta(z_1, \dots, z_n) = 0$.

Konvention
δ wird auch als Abbildung auf $K^{n\times n} = Mat_{n\times n}(K)$ aufgefasst, nämlich

$$\delta(A) = \delta(z_1, \dots, z_n), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ .... \\ --- \\ z_n \end{pmatrix};$$

i.e. z_i ist die $i$te-Zeile der $n \times n$-Matrix A.

Lemma 8.6.
Sei δ alternierend. Es gelten:

(i) $z_1, \dots, z_n$ sind linear abhängig $\Rightarrow \delta(z_1, \dots, z_n) = 0$

(ii) Für alle $i \neq j$ gilt: $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$.

Beweis:

- Ohne Einschränkung nehmen wir an $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_{n-1} \in K$.
  Wir berechnen:
  $\delta(z_1, \dots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(z_1, \dots, z_{n-1}, z_i) = 0$.

- Wir berechnen:
  $$\begin{aligned} 0 = \ & \delta(z_1, \dots, z_i + z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) = \\ & \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) + \\ & \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) = \\ & \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) + \\ & \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) + \\ & \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j, \dots, z_n) + \\ & \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n). \end{aligned}$$
  Also:
  $0 = \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) + \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$
  wie behauptet. $\square$

Bemerkung 8.7. Es gilt allgemeiner dass $\delta(z_{\pi(1)},\dots,z_{\pi(n)}) = Sign(\pi)\delta(z_1,\dots,z_n)$ für alle $\pi \in S_n$. Siehe ÜB.

Bemerkung 8.8.

(1) Wenn Char $(K) \neq 2$, dann gilt auch die Umkehrung von Lemma 8.6 (ii); d. h. wenn δ erfüllt Lemma 8.6(ii), dann ist δ alternierend:

Sei $z_i = z_j$ für $i \neq j$. Da δ Lemma 8.6(ii) erfüllt, ist

$$\delta(z_1,\dots,z_i,\dots,z_i,\dots,z_n) = -\delta(z_1,\dots,z_i,\dots,z_i,\dots,z_n)\,.$$

Da Char $(K) \neq 2$ gilt $\forall a \in K$: $a = -a \Rightarrow a = 0$. Insbesondere $\delta(z_1,\dots,z_i,\dots,z_i,\dots,z_n) = 0$.

(2) Gegenbeispiel für den Fall wo Char $(K) = 2$.

Betrachte die bilineare Form auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$:

$$\delta((a,b),(c,d)) := ac + bd\,.$$

Dann gilt $\delta((a,b),(c,d)) = -\delta((c,d),(a,b))$ immer, jedoch ist z. B. $\delta((1,0),(1,0)) = 1 \neq 0$.