9 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im Skript 8 haben wir eine n-lineare Form δ als Abbildung mit Definitionsbereich $M_{n\times n}(K)$ aufgefasst. In diesem Skript werden wir diese Abbildungen genauer analysieren, und ihre Eigenschaften studieren. Insbesondere, werden wir die Determinante als solche betrachten.

Hier, sei $\delta : K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ eine alternierende lineare Form und $A \in M_{n\times n}(K)$.

Lemma 9.1.
Sei e eine elementare Zeilenumformung. Es gelten:

(*i*) $\delta(e(A)) = \delta(A)$; e von Typ 3;

(*ii*) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$; e von Typ 1;

(*iii*) $\delta(e(A) = c\delta(A))$; e von Typ 2.

(*iv*) Allgemeiner gilt: $\forall c \in K : \delta(cA) = c^n\delta(a)$.

Beweis:

(*i*) $\delta(z_1 + cz_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n) + c\delta(z_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

(*ii*) Folgt aus Lemma 7.8.

(*iii*) Folgt aus n-Linearität.

(*iv*) $\delta(cz_1, \ldots, cz_n) = c\delta(z_1, cz_2, \ldots, cz_n) = c^2\delta(z_1, z_2, cz_3, \ldots, cz_n) = \cdots = c^n\delta(z_1, z_2, z_2, \ldots, z_n)$. □

Lemma 9.2.
Für jede $A \in M_{n\times n}(K)$ gibt es ein Skalar $\Delta_A \neq 0$; $\Delta_A \in K$, und Δ_A **hängt nur von A ab**, so dass: $\delta(A) = \Delta_A\delta(\text{r.z.S.F.}(A))$.

Beweis:
Ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Lemma 9.1. Wir sehen dass Δ_A ist ein Produkt aus der Gestalt $(-1)^\ell c_1\cdots c_k$ für geeignete $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, \ldots, c_k \in K^\times$. □

Bemerkung 9.3.
Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt die folgende Dichotomie.
Fall 1: r.z.S.F.(A) hat eine Nullzeile oder **Fall 2:** r.z.S.F.$(A) = I_n$
(siehe Skript 7 Lineare Algebra I; Bemerkung 7.3).

Also erhalten wir hier auch eine Dichotomie:
Fall 1: $\delta(A) = \Delta_A 0 = 0$ oder **Fall 2:** $\delta(A) = \Delta_A\delta(I_n)$.

Korollar 9.4.
$\delta \neq 0$ genau dann, wenn $\delta(I_n) \neq 0$.

Beweis

"$\Leftarrow$" : Klar.

"$\Rightarrow$" : $\delta(I_n) = 0 \Rightarrow \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2). □

Korollar 9.5.
Seien $\delta \neq 0, A \in M_{n\times n}(K)$. Es gilt: $\delta(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar .

Beweis:
Folgt unmittelbar aus Lemma 9.2 und Korollar 9.4 weil: A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ r.z.S.F.$(A) = I_n$ (siehe Skript 9 Lineare Algebra I; Satz 9.8). □.

Definition 9.6. und Notation
$\mathbb{A} := alt^{(n)}(K^n) :=$ die Menge der n-linearen alternierenden Formen auf K^n.

Bemerkung 9.7. $\mathbb{A}$ ist ein K-Vektorraum, er ist ein Unterraum von $L^{(n)}(K^n \times \cdots \times K^n; K)$.

Korollar 9.8.
Seien δ_1, δ_2 n-lineare alternierende Formen auf K^n. Es gilt $\delta_1 = \delta_2$ genau dann, wenn $\delta_1(e_1, \ldots, e_n) = \delta_2(e_1, \ldots, e_n)$.

Beweis:
Wir erinnern daran, dass $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standard-Basis bezeichnet. Wir haben also $\delta_1 - \delta_2 \in \mathbb{A}$, und $(\delta_1 - \delta_2)(I_n) = 0$. Aus Korollar 9.4 folgt $\delta_1 - \delta_2 = 0$. □.

Korollar 9.9.
$\dim(alt^{(n)}(K^n)) \leq 1$.

Beweis:
Sei $\delta_1 \neq 0$, $\delta_1 \in \mathbb{A}$ fest. Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ wie im Fall 2 von Bemerkung 9.3.

Es gilt $\delta_2(A) = \Delta_A\ \delta_2(I_n) = \Delta_A \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \delta_1(I_n)$ $\qquad (*)$

Setze $d := \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$.

Aus $(*)$ folgt nun: $\delta_2(A) = d\Delta_A \delta_1(I_n) = d\delta_1(A)$ für alle $A \in M_{n\times n}(K)$.
Also ist $\delta_2 = d\delta_1$. □

Wir werden nun zeigen, dass ein $\delta \in \mathbb{A}$ existiert mit $\delta(I_n) = 1$. Solch eine Funktionale δ ist wegen Korollar 9.8 notwendig eindeutig! Hierzu brauchen wir folgende:

Formelberechnung

Seien $\delta \in \mathbb{A}$ und $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$; $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Wir schreiben $z_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$ in der Standardbasis.

Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_i=1}^{n} a_{1j_1}e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}e_{j_n}\right) \overset{n-lin.}{=} \tag{$*$}$$

$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\delta(e_{j_1},\dots,e_{j_n}). \tag{$**$}$$

Betrachte nun die Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \{1,\dots,n\} & \longrightarrow & \{1,\dots,n\} \\ i & \longmapsto & j_i \end{array}.$$

• Wenn diese Abbildung **nicht** injektiv ist, dann gibt es eine Wiederholung in $(j_1,\dots,j_n)$ und damit ist $\delta(e_{j_1},\dots,e_{j_n}) = 0$.
• Wenn diese Abbildung injektiv ist, dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$ und damit ist $\delta(e_{j_1},\dots,e_{j_n}) = \delta(e_{\pi(1)},\dots,e_{\pi(n)}) = sign(\pi)\delta(e_1,\dots,e_n)$.

Also können wir nun $(**)$ umschreiben.

$$\begin{array}{rcll} (**) & = & \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\delta(e_1,\dots,e_n) & \\ & = & \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\delta(I_n) & \\ & = & \delta(I_n)\sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)} & (***) \end{array}.$$

Wir sehen also, dass $\delta(I_n) = 1$ eine Formel für δ liefert wie in $(***)$:

Satz 9.10.
Definiere für $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$:

$$\delta(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)} \tag{det}$$

Dann ist δ ist eine n-lineare alternierende Form und erfüllt $\delta(I_n) = 1$.

Beweis:

- n-linear? Berechne
  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} + da'_{1\pi(1)})a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}\right] =$

  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}) + d(a'_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)})\right]$

  usw..... Übungsaufgabe.

- alternierend?
  Sei $z_1 = z_2$, i.e. $a_{1j} = a_{2j}$ für alle $1 \leq j \leq n$, i.e. $a_{1\pi(j)} = a_{2\pi(j)}$ für alle $\pi \in S_n$ und $1 \leq j \leq n$.

Berechne (mit $S_n = A_n \cup A_n(12)$)

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \sum_{\pi \in A_n \cup A_n(12)} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{(I)}\right) + \\ &\quad \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} [sign(\pi)(12)]\ a_{1\pi(12)(1)}\ a_{1\pi(12)(2)}\ a_{3\pi(12)(3)} \cdots a_{n\pi(12)(n)}}_{(II)}\right)\end{aligned}$$

In der Summe (II) bekommen wir:

$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(2)}\ a_{1\pi(1)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} =$

$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$

Wir sehen also, die Termen kürzen sich ab, i.e. in (I) bzw. (II): $a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$, i.e. $(I) + (II) = 0$.

• Sei $0 \neq A$ diagonal; also $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Das heißt, dass die einzige Permutation, die einen Beitrag $\neq 0$ bringt, diejenige ist, für die $i = \pi(i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, i.e. $\pi = (1)$ die Identität $\in S_n$. Es bleibt also nur ein Produkt in (det) übrig, nämlich $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \delta(A)$, insbesondere $\delta(I_n) = 1$. □

Korollar 9.11.
$\dim alt^{(n)}(K^n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 9.12.
Die *Determinante* (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare alternierende Form det auf K^n, wofür $\det(I_n) = 1$ gilt.