12 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

KAPITEL III: NORMALFORMEN.

In diesem Kapitel werden wir die mögliche Matrixdarstellungen für lineare Operatoren T auf ein K- Vektorraum V noch genauer untersuchen, als wir es in der LA I (Kapitel 3; ab Skript 20) gemacht hatten. Wir werden uns darum bemühen zu verstehen, ob wir besonders "schöne" Matrixdarstellungen finden können. Das heißt, wir werden versuchen besonders "geeignete" Basen für T und V zu finden, wenn das möglich ist. In Skript 12 fangen wir damit an.

§ 9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei V ein n- dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 12.1.

(a) Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann ist $c \in K$ ein *Eigenwert von* T, falls ein $\alpha \in V$ existiert mit $\alpha \neq 0$ und
$$T(\alpha) = c\alpha.$$

(b) Sei $\alpha \in V$ und $T(\alpha) = c\alpha$, dann heißt α *Eigenvektor* (zum Eigenwert c).

(c) $W_c := \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = c\alpha\}$ ist ein Unterraum, der *Eigenraum* (zum Eigenwert c).

Bemerkung 12.2.
$W_c = \ker(cI - T)$, d.h. $W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (cI - T)\alpha = 0\}$.

Wir folgern aus Satz 11.8, Bemerkung 12.2 und Definition 11.2 :

Satz 12.3.
Seien $T \in \mathcal{L}(V,V), c \in K$. Äquivalent sind:

(i) c ist Eigenwert von T.

(ii) $(cI - T)$ ist nicht invertierbar.

(iii) $\det(cI - T) = 0$.

Satz 12.4.
$\det(xI - T)$ ist ein normiertes Polynom von Grad $n = \dim\,(V)$. Die Eigenwerte von T sind also genau dessen Nullstellen, T kann also höchstens n Eigenwerte in K haben.

Beweis:
Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$, $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Es ist $xI - A = [xI - T]_{\mathcal{B}}$.

Nun ist
$B := xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & \\ & & x - a_{nn} \end{pmatrix}$ mit $b_{ii} = (x - a_{ii})$
Also sind die Einträge vom B Polynome vom Grad 0 oder 1 oder das Nullpolynome und
$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \underbrace{(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}}$.
Wir berechnen:
$\deg\ (b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}) = |\{i \in \{1, \ldots, n\} : \tau(i) = i\}|$.
Also ist $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$ der einzige Term von Grad n, und somit der Hauptterm. Wir sehen also, dass
$\deg \left(\sum_{\tau}(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)} \right) = n$ und außerdem, dass $\det(xI - A)$ ein normiertes Polynom ist. Die letzte Aussage folgt wegen Satz 12.3 und Korollar 4.3. □

Definition 12.5.
$c \in K$ ist ein Eigenwert von $A \in Mat_{n\times n}(K)$, falls $(cI - A)$ singulär ist. Also sind die Eigenwerte von A die Nullstellen von $\det(xI - A)$.

Definition 12.6.
$f(x) := \det(xI - A)$ ist das charakteristische Polynom von A.

Lemma 12.7.
Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

Beweis
Für $B = P^{-1}AP$ gilt
$\det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) = \det P^{-1} \det(xI - A) \det P = \det(xI - A)$. □

Definition 12.8.
Sei V endlich dim; $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

$$\text{Char. Pol. } (T) := \text{ Char. Pol. } ([T]_{\mathcal{B}})$$

für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von V (und damit für jede Basis).

Beispiel 12.9.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$
hat keine reelle Eigenwerte, weil $\det(xI - A) = x^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat.

$$(ii)\;\; A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\text{Char. Pol. } (A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Eigenwerte $c = 1,\; c = 2 \in \mathbb{R}$.

- $c = 1 \quad \ker(A - I) := W_1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } = 2, \text{ also } \dim W_1 = 1.$$

Wir wollen eine Basis für W_1 finden. Löse

$$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = (1, 0, 2)$ ist eine Lösung und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1.

- $c = 2 \quad \ker(A - 2I) := W_2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } = 2, \text{ also } \dim W_2 = 1.$$

Finde Lösung wie oben: $\alpha_2 = (1, 1, 2)$ und $\{\alpha_2\}$ ist eine Basis für W_2.

Lemma 12.10.
Seien c_i für $i = 1, \ldots, k$ Eigenwerte von T, und nehme an dass $c_i \neq c_j$ für alle $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Sei $v_i \neq 0\,; v_i \in V$ Eigenvektor zum Eigenwert c_i. Dann ist $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig.

Beweis:
Bemerke, dass $v \in V, v \neq 0 \Rightarrow v$ kann nicht Eigenvektor zu verschiedenen Eigenwerten sein.
Wir führen einen Beweis per Induktion: $k = 2$.
Ist $v_2 = cv_1$, so ist $v_2 \in W_{c_1}$, also ist v_2 ein Eigenvektor zur c_1 und $c_2 \neq c_1$. Widerspruch.
Induktionsannahme gelte für $k - 1$.
Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig. OE haben wir also $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$

$$T(v_k) = c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i \text{ und } T(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$

$$\Rightarrow c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i) v_i = 0$$

$$\Rightarrow c_k - c_i = 0 \Rightarrow c_k = c_i \text{ (mit } i = 1, \ldots, k-1).$$

Widerspruch. $\square$

Korollar 12.11.
Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$. Nimm an, dass T n-verschiedene Eigenwerte $d_1, \ldots, d_n$ in K hat. Dann hat V eine Basis $\mathcal{D}$, bestehend aus Eigenvektoren von T.

Definition 12.12.
Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$. T ist diagonalisierbar (über K), falls V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

Bemerkung 12.13.
Seien $d_1, \ldots, d_n$ verschiedene Eigenwerte von T und $\mathcal{D}$ eine Basis wie im Korollar 12.1. Dann ist $[T]_{\mathcal{D}}$ diagonal.