

16 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skripte 16 und 17 werden wir T -invariante Unterräume sowie die Matrixdarstellung von T diesbezüglich studieren. Wir schließen Skript 16 mit einer Erinnerung aus der LA I.

§ 12 Invariante Unterräume

Sei V ein n -dimensionaler K - Vektorraum.

Definition 16.1.

Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann ist W T -invariant, falls $T(W) \subseteq W$.

Beispiel 16.2.

- (0) $\{0\}$ und V sind T -invariant für alle T .
- (1) Sei D der Ableitung Operator auf $V = K[x]$ und $W := K[x]_{\leq d} = \{f; f = 0 \text{ oder } \deg f \leq d\}$. Dann ist W D -invariant.
- (2) Sei $U \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $TU = UT$, setze
 - (a) $W := \text{Im}(U)$
 - (b) $N := \ker(U)$

Dann sind W und N T -invariant.

Beweis:

- (a) Sei $\alpha \in \text{Im}(U)$, $\alpha = U(\beta)$; $T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \text{Im}(U)$
- (b) $\alpha \in N$; $U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0 \Rightarrow T(\alpha) \in N$
- (3) $W \subseteq V$ ist T -invariant $\Rightarrow W$ ist $g(T)$ -invariant für alle $g \in K[x]$ (ÜB).
- (4) Für alle $g \in K[x]$ gilt $g(T)T = Tg(T)$ (ÜA). Insbesondere gilt dies für $g(T) := cI - T$. Wegen (2) ist also $\ker(T - cI)$ T -invariant; i.e. der Eigenraum W_c zum Eigenwert c ist T -invariant.
- (5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Setze $T := T_A$. Wir behaupten, dass nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ T -invariant sind: Sei $W \neq V, W \neq \{0\}$ T -invariant. Es gelte aber dann daraus, dass $\dim W = 1$. Sei $\alpha \neq 0, \alpha \in W$; $\{\alpha\}$ ist eine Basis und damit ein Eigenvektor (weil $T(\alpha) \in W$, also $T(\alpha) = c\alpha$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$). A hat aber keine reellen Eigenwerte.

• **Der Operator T_W :**

Sei W T -invariant, setze $T_W := T \upharpoonright_W$. Dann ist $T_W \in \mathcal{L}(W, W)$ (ÜA).

• **Matrix-Darstellung von T_W :**

Sei $W \subseteq V$ ein T -invarianter Unterraum mit $\dim W = r$.

Sei $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ eine Basis für W . Ergänze \mathcal{B}' zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ für V .

Betrachte $A := [T]_{\mathcal{B}}$. Wir haben die Gleichungen

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\alpha_i$$

W ist T -invariant $\Rightarrow T\alpha_j \in W$ für $j \leq r$. Also $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^r A_{ij}\alpha_i$ für $j \leq r$, das heißt $A_{ij} = 0$ für $j \leq r$ und $i > r$. Also sieht A aus:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r$, C $r \times (n-r)$ und D $(n-r) \times (n-r)$ sind. Es ist darüber hinaus klar, dass $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 16.3.

Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T -invariant. Es gelten:

- (i) Char. Pol. (T_W) teilt Char. Pol. (T).
- (ii) Min. Pol. (T_W) teilt Min. Pol. (T).

Beweis:

- (i) Ist klar, weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

und somit ist $\det(xI - A) = \det(xI - B) \det(xI - D)$, wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

- (ii) Beachte, dass

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$

wobei gilt: C_k ist $r \times (n-r)$. Also jedes Polynom das A annulliert, annulliert auch damit B . Also Min. Pol. (B) teilt Min. Pol. (A). \square

Wir werden in der nächsten Vorlesung die Matrix D genauer untersuchen.

Erinnerung (Quotientenraum und direkte Summen aus Lineare Algebra I; Skripte 26 und 27):

- (1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. $V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ mit $c(\alpha + W) = c\alpha + W$ für $c \in K$ und $(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta) + W$ für $\alpha, \beta \in V$.

Bezeichnung: $\alpha + W := \bar{\alpha}$.

- (2) **Kanonischer Homomorphismus**

$$\pi : V \rightarrow V/W$$

$\pi(\alpha) := \alpha + W$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W$.

- (3) **Isomorphiesatz**

Sei $\varphi : V \rightarrow U$ ein Homomorphismus von K -Vektorräumen. Es gilt: $V/\ker \varphi \simeq \text{Im } \varphi$.

- (4) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Man schreibt $V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe), falls $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Das heißt für alle $\alpha \in V$ existiert genau ein $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, so dass $\alpha = w_1 + w_2$.

Projektion Homomorphismus

$\pi : W_1 \oplus W_2 \rightarrow W_2$; $\pi(w_1 + w_2) := w_2$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$. Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

- (5) Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T -invariant. Die Abbildung

$$\bar{T} : V/W \rightarrow V/W$$

wird so definiert:

$$\bar{T}(\bar{\alpha}) = \bar{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}.$$

Sie ist wohldefiniert, i.e. $\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$, weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$. Sie ist auch linear; i.e. $\bar{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$.