23 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Abschnitt 19 werden wir Isometrien kennenlernen, und zeigen dass diese lineare Operatoren die Distanz und die Norm erhalten. In Abschnitt 20 untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Isometrien und orthonormalen Basen. In Abschnitt 21 führen wir normale Operatoren ein, und sagen den Spektralsatz aus. Diesen beweisen wir dann in Skript 24.

Sei V ein endlich dimensionaler K - Vektorraum und $(\mid)$ ein inneres Produkt.

§ 19 Isometrie

Definition 23.1.
Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$, so dass $U^* = U^{-1}$, dann heißt U eine *Isometrie.*
• Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *orthogonal.*
• Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *unitär.*

Satz 23.2.
Für $U \in \mathcal{L}(V,V)$ sind äquivalent:
(1) $U^*U = UU^* = Id$

(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle x, y (das heißt, U erhält $(\mid)$.)

(3) $\|Ux\| = \|x\|$ für alle x (das heißt, U erhält die Norm).

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2):
$(Ux \mid Uy) = (x \mid U^*Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$

(2) $\Rightarrow$ (3):
(2) anwenden mit $x = y$

(3) $\Rightarrow$ (1):
$(Ux \mid Ux) = (U^*Ux \mid x) = (x \mid x)$. Also $([U^*U - Id]x \mid x) = 0$ für alle $x \in V$. Setze $T := U^*U - Id$, dann ist Hermite'sch (wegen 22.3(ii)). Ferner gilt $(Tx \mid x) = 0$ für alle x. Wir behaupten dass auch $(Tx \mid y) = 0$ für alle x, y $(*)$. Benutze folgende Gleichungen für Hermite'sche Operatoren.
• Für $K = \mathbb{R}$: $2(Tx \mid y) = (T(x+y) \mid x+y) - (T(x-y) \mid x-y)$, und für $K = \mathbb{C}$:
• $4(Tx \mid y) = (T(x+y) \mid x+y) - (T(x-y) \mid x-y) + i\,(T(x+iy) \mid x+iy) - i\,(T(x-iy) \mid x-iy)$.

Insbesondere gilt $(Tx \mid Tx) = 0$ für alle x (nehme $y := T(x)$ in $(*)$), also $T = 0$. □

Bemerkung 23.3.
(i) (3) impliziert, dass U auch die Distanz erhält, das heißt:

(4) $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$

(ii) Da Isometrien invertierbar sind und erhalten das innere Produkt, ist die Abbildung $U : (V, (\mid)) \xrightarrow{\sim} (V, (\mid))$ ein *Automorphismus* des inneren Produkt-Vektorraums $(V, (\mid))$.

Satz 23.4.
Eigenwerte von Isometrien haben den absoluten Betrag gleich 1.

Beweis:
Sei $Ux = cx, x \neq 0; c \in \mathbb{C}$.
Es ist $\|Ux\| = \|x\|$ und $\|Ux\| = \|cx\| = |c| \; \|x\|$. Also $| \; c \; | = 1$. □

§ 20 Orthonormal-Basis wechseln

Satz 23.5.
Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine orthonormale Basis und $U \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann is U eine Isometrie genau dann wenn $\mathcal{U}\mathcal{X} := \{Ux_1, \ldots, Ux_n\}$ eine orthonormale Basis ist.

Beweis:
"⇒" $(Ux_i \mid Ux_j) = (x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$. Also ist $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal und $\mathcal{U}\mathcal{X}$ ist eine Basis, weil U invertierbar ist.

"⇐" Sei $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal. Es gilt also $(Ux_i \mid Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \mid x_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und damit durch Linearität gilt $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$. □

Matrix-Version:

Definition 23.6. Sei $A \in M_{n \times n}(K)$.
- Wenn $K = \mathbb{R}$ und $AA^* = A^*A = I_n$, heißt A *orthogonal*.
- Wenn $K = \mathbb{C}$ und $AA^* = A^*A = I_n$, heißt A *unitär*.

Bemerkung 23.7.
(i) Seien U eine Isometrie und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis, dann ist $A := [U]_{\mathcal{X}}$ unitär (bzw. orthogonal).

(ii) Matrix-Version von Satz 23.5:
Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis, dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal genau dann, wenn die Basiswechsel-Matrix unitär ist.

§ 21 Spektral-Theorie

In diesem Kapitel haben wir bisher drei wichtige Klassen von Operatoren studiert:
(a) Hermit'sche $(T^* = T)$
(b) schief Hermite'sche $(T^* = -T)$
(c) unitäre $(T^* = T^{-1})$.

Alle erfüllen die folgende Eigenschaft:

Definition 23.8.
$T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist normal, falls $T^*T = TT^*$ ist.

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen und wollen den Hauptsatz des Kapitels beweisen:

Satz 23.9. Spektralsatz für normale Operatoren.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ normal. Setze $p := Min.Pol.(T)$. Dann ist $p = p_1 \dots p_k$, wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und für alle i ist p_i normiert und irreduzibel (deg $p_i = 1$ oder deg $p_i = 2$).
Für jedes i sei $W_i := \ker p_i(T)$ der T-invariante Unterraum von V. Dann ist W_i orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ (das heißt V ist die orthogonale direkte Summe von $W_1, \cdots, W_k$.)

Für den beweis brauchen wir Hilfslemmata.

Lemma 23.10.
Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant.

Beweis:
Sei $u \in W^\perp, w \in W$ und berechne $(w \mid T^*u) = (Tw \mid u) = 0$ für alle $w \in W$. Also ist $T^*u \in W^\perp$. □

Fortsetzung in Skript 24.