24 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir zunächst einige Hilfslemmata beweisen, so dass wir den Spektralsatz nachweisen können. Damit beenden wir Abschnitt 21. In Abschnitt 22 kommen wir zurück auf die Begriffe von Trigonalisierung und Diagonalisierung. Mithilfe von $(\ |\ )$ erhalten wir diesbezüglich stärkere Aussagen als die vom Kapitel III. In Abschnitt 23 untersuchen wir die Eigenwerte von normalen Operatoren, mithilfe vom Spektralsatz.

Sei V ein endlich dimensionaler K - Vektorraum, $(\ |\ )$ ein inneres Produkt auf V und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Bemerkung 24.1. Da $T^{**} = T$ (siehe ÜB 11) wenden wir Lemma 23.10 auf T^* an und bekommen: $W \subseteq V$ ist T^*-invariant $\Rightarrow W^\perp$ ist T-invariant.

Lemma 24.2.
Sei T normal, $g(x) \in K[x]$ und $W := \ker g(T)$. Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

Beweis:
Wir zeigen dass W T^*-invariant ist. Da $TT^* = T^*T$ ist es einfach zu prüfen dass auch $g(T)T^* = T^*g(T)$. Sei $u \in W$. Berechne: $g(T)(T^*(u)) = T^*(g(T)(u)) = T^*(0) = 0$. Also auch $T^*(u) \in W$. Bemerkung 24.1 impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant. □

Bemerkung 24.3. Ist g ein Faktor von $p :=$ Min. Pol. (T), dann ist $g(T)$ **nicht** invertierbar. In der Tat, sei $p = gh$ mit $0 < \deg h < \deg p$. Wäre $g(T)$ invertierbar, dann hätten wir
$0 = g(T)^{-1}p(T) = g(T)^{-1}g(T)h(T)$ und damit $h(T) = 0$. Widerspruch zu $\deg p$ ist minimal. □

Beweis vom Spektralsatz (Satz 23.9)
• Wir bemerken vorab dass W_i T- invariant ist, für alle $i = 1, \cdots, k$ (s. 16.2(2)).

• Sei $p = p_1 \dots p_k$ die Primfaktorisierung von p (s. Satz 5.15). Wir müssen zeigen dass $p_i \neq p_j$ für alle $i \neq j$ und dass $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Beweis via Induktion nach k. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen an, die Behauptung gilt für $k - 1$.

• Lemma 24.2 impliziert dass $W_1^\perp$ T-invariant ist. Bemerke dass $p_1 =$ Min. Pol. (T_{W_1}) (per Definition von W_1 und Irreduzibilität von p_1). Betrachte $T_{W_1^\perp}$ und bemerke, dass $\ker p_1(T_{W_1^\perp}) = \{0\}$ ($x \in W_1^\perp$ und $x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0$). Also ist $p_1(T_{W_1^\perp})$ invertierbar und damit (wegen 24.3) ist p_1 **kein** Faktor von Min. Pol. $(T_{W_1^\perp}) := P_2$ (i.e. p_1 und P_2 sind teilerfremd). Aus Aufgabe 9.3 folgt aber $p = kgV(p_1, P_2) = p_1P_2$. Also ist $P_2 = p_2 \cdots p_k$. Also $p_1 \neq p_j$ für $j = 2, \dots, k$.

• Nun wollen wir die Induktionsannahme auf $T_{W_1^\perp}$ und P_2 anwenden. Bemerke dass $W_1^\perp$ auch T^*-invariant ist (Lemma 23.10) und deshalb $T^*_{W_1^\perp} = (T_{W_1^\perp})^*$. Da T normal ist, folgt nun dass auch auch $T_{W_1^\perp}$ normal ist. Bemerke auch dass $\ker p_i(T_{W_1}) = \{0\}$, für alle $i = 2, \cdots, k$, da $p_1 =$ Min. Pol. (T_{W_1}) und p_1 und p_i teilerfremd sind (wie im Beweis von 18.3 schreibe $I = p_1(T_{W_1})q_1(T_{W_1}) + p_i(T_{W_1})q_2(T_{W_1}) = p_i(T_{W_1})q_2(T_{W_1})$). Es folgt dass $W_i = \ker p_i(T_{W_1^\perp})$.

• Nun können wir die Induktionsannahme anwenden und bekommen also $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, $i, j = 2, \cdots, k$ und $W_1^\perp = W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$. □

§ 22 Orthonormale Trigonalisierung und Diagonalisierung

Satz 24.4. (Orthonormale Trigonalisierung)
Sei $K = \mathbb{C}$ und V ein endlich dim. inneres Produkt K-Vektorraum; $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann gibt es eine orthonormale Basis $\mathcal{X}$, so dass $[T]_{\mathcal{X}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis:
Induktion nach $n := \dim V$. Sei $c \in \mathbb{C}$ und $x \neq 0$ mit $T^*x = cx$, $W := (span\{x\})^{\perp}$ und $\dim W = \dim V - 1 = n - 1$.
Lemma 23.10 impliziert: W ist T-invariant, also ist T_W wohldefiniert.
Per Induktionsannahme setze $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ als orthonormale Basis für W, wofür die Matrix-Darstellung von T_W eine obere Dreiecksmatrix ist.
Setze $x_n := x/\|x\|$. Dann ist $\mathcal{X} := \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ die gesuchte Basis. □

Korollar 24.5.
Für jede $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{C}$ gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $U^{-1}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis:
Wähle $\mathcal{X}$ als eine orthonormale Basis und definiere $T(x) = A\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$, wobei $x = \sum \varepsilon_i x_i$ ist, für $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Finde eine orthonormale Basis $\mathcal{J}$ wie in Satz 24.4. Setze $U :=$ Matrix der Basiswechsel. Dann ist $U^{-1} = U^*$ und $U^{-1}AU = B$ die obere Dreiecksmatrix. □

Korollar 24.6.
$K = \mathbb{C}$. Sei T normal. Es gibt eine orthonormale Basis bestehend aus Eigenvektoren von T.

Beweis:
Seien p, p_i und W_i wie im Spektralsatz. Für alle $i = 1, \cdots, k$ ist p_i linear über $\mathbb{C}$, $p_i = (x - c_i)$. Also ist W_i der Eigenraum zum Eigenwert c_i. Wähle nun eine orthonormale Basis $\mathcal{X}_i$ für W_i für alle $i = 1, \ldots, k$ (G-S). Also $\mathcal{X}_i$ besteht aus EigenV. zum EigenW. c_i, für alle $i = 1, \ldots, k$. Also ist $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{X}_k$ die gewünschte Basis. □

Definition 24.7.
$B, A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(*i*) A ist normal, falls $AA^* = A^*A$

(*ii*) A ist unitär äquivalent zu B, falls es eine unitäre $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit $B = U^{-1}AU$ gibt.

Korollar 24.8. (Matrixversion von Korollar 24.6.)
Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, A normal, dann ist A unitär äquivalent zu einer diagonalen Matrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

§ 23 Anwendungen vom Spektralsatz

Korollar 24.9.
$K = \mathbb{C}$, T ist normal. Es gilt: T ist Hermite'sch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$.

Beweis

"$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien alle Eigenwerte reell und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis, bestehend aus EigenV. Also ist

$$D = [T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ mit } d_i \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar, dass D Hermite'sch ist $(D^* = \overline{D^t} = D^t = D)$. Also ist auch T Hermite'sch (siehe Folgerungen 21.10(2)). □

Korollar 24.10.
$K = \mathbb{C}, T$ ist normal. Es gilt: T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben den Absolutbetrag 1.

Beweis

"$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien die Eigenwerte $z_i, \dots z_n$ und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis bestehend aus EigenV, so dass

$$[T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D.$$

Behauptung: D ist unitär.

Berechne $D^* = \overline{D^t} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Also } DD^* &= \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1\overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

Also ist auch T unitär (siehe Folgerungen 21.10(2)). □