Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 1
Algebren und Polynome

Abgabe: 30.04.2020 bis 10:00, per e-mail an Ihren Tutor.

1	2	3	4	Σ

Aufgabe 1.1 **(4 Punkte)**

Erinnerung: $K[[X]]$ bezeichnet die Algebra der Potenzereihen über K, deren Multiplikation durch $(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}$ definiert ist.

Sei K ein Körper.

a) Sei $x = (0, 1, 0, \dots) \in K[[X]]$. Zeigen Sie, dass

$$x^i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-te Stelle}}, 0 \dots)$$

b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation in $K[[X]]$ distributiv ist und dass für jedes $c \in K$ und alle $f, g \in K[[X]]$ gilt: $c(fg) = (cf)g$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[X]$ mit $f + g \neq 0$ gilt

$$deg(f + g) \leq max\{deg(f), deg(g)\}$$

d) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[X]$ mit $deg(f) \neq deg(g)$,

$$deg(f + g) = max\{deg(f), deg(g)\}$$

Aufgabe 1.2 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper.
Erinnerung: Zwei K-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind isomorph als K-Algebren, wenn es einen K-Isomorphismus von Vektorräumen $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gibt mit $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass $K[[X]]$ ein Integritätsbereich ist.

b) Es seien S, T isomorphe K-Algebren. Zeigen Sie, dass S genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn T ein Integritätsbereich ist.

c) Zeigen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ mit Multiplikation $(fg)_n = f_n g_n$ eine K-Algebra mit Einheit ist.

d) Sind $K[[X]]$ und $\mathcal{A}$ isomorph als K-Algebren?

Aufgabe 1.3 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper.
Erinnerung: Seien V ein K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $f \in K[X]$. Für ein Polynom $f := \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ mit $c_i \in K$ definieren wir $f(T) := \sum_{i=0}^{n} c_i T^i$ wobei $T^0 := Id_V$ und $T^i := T \circ T^{i-1}$ (T komponiert mit T^{i-1}).

a) Sei $T : K^3 \to K^3$ der lineare Operator definiert durch:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$$

Sei $f \in K[X]$ das Polynom $f(x) = -x^3 + 2$.

Berechnen Sie $f(T)(x_1, x_2, x_3)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in K$.

Sei K ein Körper und $h \in K[X]$ vom Grad mindestens 1 und definiere die Abblidung:

$\phi_h : K[X] \to K[X]$ durch $f \mapsto f(h)$.

b) Zeigen Sie, dass ϕ_h linear und injektiv ist.

c) Sei $f \in K[X]$. Zeigen Sie, dass $deg(\phi_h(f)) = deg(f)deg(h)$

d) Zeigen Sie, dass ϕ_h genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $deg(h) = 1$