Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 2
Polynomfunktionen

Abgabe: 07.05.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden der Skript zur Linearen Algebra 1 und Vorlesungen 1,2,3 aus dem Skript zur Linearen Algebra 2 vorausgesetzt.

Aufgabe 2.1 **(4 Punkte)**
Sei K ein Körper, sei $V := K[x]_{\leq n}$ der Vektorraum aller Polynomen vom Grad $\leq n$ und seien $t_0, \ldots, t_n$ paarweise verschiedene Elemente von K. Für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ definieren wir die Abbildung $L_i \in V^*$ durch $L_i(f) := f(t_i)$.

a) Wir definieren:
$$P_i := \prod_{j \neq i} \frac{x - t_j}{t_i - t_j}$$
Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ $L_i(P_j) = \delta_{i,j}$, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Delta ist.

b) Folgern Sie aus a), dass $\{L_0, \ldots, L_n\}$ eine Basis von V^* ist und $\{P_0, \ldots, P_n\}$ eine Basis von V.

Aufgabe 2.2 **(4 Punkte)**
Sei K ein endlicher Körper.

a) Sei $c \in K$, $c \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $c^n = 1$.

b) Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $c^n = c$ für alle $c \in K$. Folgern Sie, dass die Abbildung
$$\Phi\colon K[x] \longrightarrow K[x]^{\sim}, \quad f \longmapsto \tilde{f}$$
von Polynomen auf Polynomfunktionen (siehe Beispiel 2.6) über endlichen Körpern nicht injektiv ist.

Aufgabe 2.3 **(4 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende Aussage (Satz 2.8 aus dem Skript).

Seien $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit, $f, g \in K[x]$, $\alpha \in \mathcal{A}$, und $c \in K$. Es gelten

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht Korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.

Erinnerung: Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra und S eine Teilmenge von $\mathcal{A}$. Die von S erzeugte K-Algebra ist der Schnitt aller K-Algebren, die S enthalten (es ist also die kleinste K-Algebra, die S enthält).

Sei $\mathcal{A}$ die von $\{x^2, x^3\}$ erzeugte $\mathbb{R}$-Algebra in $\mathbb{R}[x]$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Algebren nicht isomorph sind, obwohl sie als $\mathbb{R}$-Vektorräume isomorph sind. Wir nehmen an, es existiere einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren: $\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \mathit{span}(\{x^k \mid k \neq 1\})$ und geben Sie dann eine kurze Erklärung, warum $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-**Vektorräume** isomorph sind.

   Hinweis: jede Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Linearkombination von 2 und 3 schreiben.

b) Sei $h := \Phi(x)$. Zeigen Sie $\Phi = \phi_h$, wobei ϕ_h wie in Aufgabe 3 definiert ist.

c) Folgern Sie aus Aufgabe 1.3 (Blatt 1) , dass $\mathit{deg}(h) = 1$ gelten muss. Beachten Sie, dass wir 1.3(d) nicht anwenden können.

d) Folgern Sie aus c), dass $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Algebren nicht isomorph sind.