Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 4
Ideale und Permutationen

Abgabe: 22.05.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 4.1 **(4 Punkte)**

(a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}[X]$ sind Ideale? Begründen Sie Ihre Antwort.

  (a) $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) = 0\}$.

  (b) $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f = 0 \text{ oder } \deg(f) \leq 4\}$.

  (c) $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid D(f)(2) = 0\}$.

(b) Seien K ein Körper und I_i ein Ideal von $K[x]$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} I_i$ ein Ideal von $K[x]$ ist.

(c) Seien K ein Körper und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K[x]$. Zeigen Sie, dass das von $\{a_1, \ldots, a_n\}$ erzeugte Ideal gleich dem Durchschnitt alle Ideale die $\{a_1, \ldots, a_n\}$ enthalten.

Aufgabe 4.2 **(4 Punkte)**

(a) Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle x^2 + 8x + 16, x + 1\rangle = K[x].$$

(b) Mithilfe vom Satz 4.8, berechnen Sie die Nullstelle mit den entsprechenden Vielfachheiten des folgenden Polynoms

$$f(x) = -24 + 20x + 2x^2 - 5x^3 + x^4 \in \mathbb{Q}[x].$$

(c) Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p und jedes $a \in \mathbb{F}_p$, das Polynom $x^p - a \in \mathbb{F}_p[x]$ eine vielfache Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4.3 **(4 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Schreiben Sie

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \in S_n$$

als Produkt von disjunkten Zyklen und als Produkt von Transpositionen. Berechnen Sie $\operatorname{sign}(\sigma)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma, \tau \in S_n$ kommutieren, wenn σ und τ disjunkt sind.

(c) Seien $\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in S_n$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ paarweise disjunkt. Zeigen Sie, dass $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ und τ genau dann disjunkt sind, wenn für alle $0 < i \leq m$ α_i und τ disjunkt sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte
Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ Mal}}$. Seien $\sigma, \tau \in S_n$ und $f, g\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(i) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f$;

(ii) $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$.