Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

**Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II**

**Blatt 5**
**Die symmetrische Gruppe $S_n$**

**Abgabe:** 29.05.2020, an Ihren Tutor.

| 1 | 2 | 3 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 5.1** **(4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass $|S_n| = n!$.

*Hinweis: Sie können eine Induktion auf $n$ durchführen und ein geeignetes $\tau \in S_n$ finden, so dass $\tau\sigma$ ein Element von $S_{n-1}$ ist.*

(b) Sei $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_m)$ ein $m$-Zyklus in $S_n$. Zeigen Sie, dass $\sigma^{-1} = (i_m\ i_{m-1}\ \ldots\ i_2\ i_1)$ gilt.

**Aufgabe 5.2** **(3 Punkte)**
In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jedes $\sigma \in S_n$ sich als Produkt von Zyklen mit paarweise disjunkten Trägern darstellen lässt.
Zeigen Sie, dass diese Darstellung bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

**Aufgabe 5.3** **(5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $S_n$ genau dann kommutativ ist, wenn $n \leq 2$.

(b) Sei $A_n$ die alternierende Gruppe (Definition 7.10). Zeigen Sie, dass die Menge aller 3-Zyklen die Gruppe $A_n$ erzeugt, falls $n \geq 3$. (Eine Teilmenge $M$ einer Gruppe $G$ erzeugt $G$, falls jedes Element aus $G$ das Produkt von Elementen aus $M$ und Inversen von Elementen aus $M$ ist.)

**Zusatzaufgabe für Interessierte**
*Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.*

Sei $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $\tau^{n!} = \mathrm{id}$ für alle $\tau \in S_n$.

*Hinweis: Untersuchen Sie zunächst, was die $l$-te Potenz eines $m$-Zyklus ist.*