Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 6
Multilineare Formen

Abgabe: 05.06.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 6.1 **(3 Punkte)**
Sei K ein Körper und sei $\mathbb{A} = alt^{(n)}(K^n)$ die Menge aller n-linearen alternierenden Formen auf K^n (Definition 9.6).
Beweisen Sie Bemerkung 9.7: $\mathbb{A}$ ist ein K-Unterraum von $L^{(n)}(K^n \times \ldots \times K^n; K)$.

Aufgabe 6.2 **(5 Punkte)**
Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

(a) Sei $\delta \colon V^n \to K$ ein n-lineares alternierendes Funktional (Definition 8.5). Beweisen Sie die Aussage von Bemerkung 8.7:
für alle $\pi \in S_n$ gilt $\delta(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) = Sign(\pi)\delta(z_1, \ldots, z_n)$.

(b) Wir sagen, dass δ trivial ist, wenn $\delta(z_1, ..., z_n) = 0$ für alle $z_1, ..., z_n \in V$. Sei $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass δ genau dann trivial ist, wenn $\delta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$.

(c) Sei U ein r-dimensionaler Unterraum von V, seien $x_{r+1}, ..., x_n$ feste Vektoren in V und sei $\delta : V^n \to K$ ein n-lineares alternierendes Funktional. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\delta_U : U^r \to K$$

definiert durch

$$\delta_U(u_1, ..., u_r) := \delta(u_1, ..., u_r, x_{r+1}, ..., x_n)$$

ein alternierendes r-lineares Funktional ist. Wann ist δ_U nicht trivial? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6.3 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$. Sei

$$\delta(A) := \sum_{\pi \in S_n} Sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

wie im Satz 9.10. Ergänzen Sie den Beweis von Satz 9.10 im allgemeinen Fall:

(a) Zeigen Sie, dass δ n-linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass wenn $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $z_i = z_j$ existieren, dann $\delta(A) = 0$.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.

In dieser Aufgabe beweisen wir die folgende Aussage:
Kleiner Fermatscher Satz: Für jede Primzahl p und jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

(a) Begründen Sie kurz, dass die Behauptung aus der folgenden Aussage folgt:
für jede Primzahl p und jedes $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Jetzt beweisen wir die Aussage aus (a): seien p prim und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Vielfache $0, a, 2a, \dots, (p-1)a$ paarweise unterschiedlich mod p sind.

(c) Folgern Sie, dass

$$1 \cdot 2 \cdots (p-1)a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod{p}$$

gilt.

(d) Schließen Sie, dass $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ gilt.