Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 7
Determinante

Abgabe: 12.06.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 7.1 **(4 Punkte)**

(a) Sei K ein Körper und seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1, f_2 \in K$. Ohne Berechnung, erklären Sie warum

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(b) Sei $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ und alle Einträge seien entweder 1 oder -1. Beweisen Sie, dass $\det A \in \mathbb{Z}$ und teilbar durch 2^{n-1} (in $\mathbb{Z}$) ist.

Aufgabe 7.2 **(3 Punkte)**

(a) Seien $a, b, c, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Seien $A := (a, r_1, b, r_2)$ (A ist also die 4×4-Matrix, die a, r_1, b, r_2 als Spalten hat), $B := (c, r_1, a, r_2)$ und $C := (b, r_1, c, r_2)$ mit $\det A = 3$ und $\det B = 2$ und $\det C = 1$.

Finden Sie $\det(A + B)$.

(b) Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 9 \\ 10 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{F}_{11}$.

Aufgabe 7.3 **(5 Punkte)**

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbare Matrizen. Zeigen Sie, dass:

(a) (i) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$

(ii) $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$

(iii) $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-2} A$

(b) Benutzen Sie die Cramersche Regel, um das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_5$ zu lösen:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 4 \end{array}$$

Zusatzaufgabe für Interessierte

Sei $n \geq 2$. Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ und sei

$$V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ & & \ldots & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

die Vandermonde-Determinante.

Zeigen Sie mit Induktion über n, dass $V_n = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$.