Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 8
Charakteristisches Polynom

Abgabe: 19.06.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 8.1 **(4 Punkte)**

Seien $A \in K^{r\times r}, B \in K^{r\times s}$ und $C \in K^{s\times s}$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(A)$

(b) Zeigen Sie, dass $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C)\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$

(c) Zeigen Sie, dass $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$.

(d) Folgern Sie, dass $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

Aufgabe 8.2 **(4 Punkte)**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über jedem der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ berechnen Sie:

(i) das charakteristische Polynom von A und die Eigenwerte von A;

(ii) das Minimalpolynom von A;

(iii) die Eigenräume von A;

(iv) die Eigenvektoren von A.

Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$?

Aufgabe 8.3 **(4 Punkte)**

Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

(a) In dieser Teilaufgabe beweisen Sie Bemerkung 14.5(1). Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in K[x]$,

$$[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$$

gilt.

(b) In dieser Teilaufgabe wird der Beweis von Satz 14.6 ergänzt. Sei p das Minimalpolynom von T. Seien ferner $\alpha \in V \setminus \{0\}$ und $c \in K$ mit $T(\alpha) = c\alpha$. Zeigen Sie, dass

$$p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$$

gilt.

(c) Sei W ein T-invarianter Unterraum von V. Zeigen Sie, dass W $f(T)$-invariant ist, für alle $f \in K[x]$.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist freiwillig und wird nicht korrigiert. Eine Musterlösung wird veröffentlicht.

Seien $A, B, C, D \in K^{n\times n}$.

(a) Wir nehmen an, dass D invertierbar ist und mit C kommutiert. Zeigen Sie, dass

$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(AD - BC)$ gilt.

(b) Gilt diese Formel auch wenn D nicht invertierbar ist?

(c) Gilt diese Formel auch wenn C und D nicht kommutieren?