Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 9

Abgabe: 26.06.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

(a) Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $\mathcal{K}$ die Algebra der Polynomen in T. Sei $C \in Mat_{m\times m}(K[x])$, also $\det(C) \in K[x]$. Nun sei $B := C(T) \in Mat_{m\times m}(\mathcal{K})$ die Matrix die man aus C erhaltet wenn man jeden Eintrag von C in T evaluiert, d.h. $B_{ij} := C_{ij}(T)$, für alle i, j.

Zeigen Sie, dass $(\det(C))(T) = \det(B)$ gilt.

(b) Sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$ und sei $p = \text{CharPol(A)}$. Der Satz von Cayley-Hamilton sagt, dass $p(A) = 0$ gilt. Ist folgender Beweis richtig?

Aus $p(x) = \det(xI - A)$ *folgt* $p(A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

In dieser Aufgabe ergänzen Sie den Beweis von Lemma 17.1(2).
Seien K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Unterraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von W. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ Vektoren aus V so dass, $\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_r\}$ eine Basis von V/W ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ eine Basis von V ist.

Erinnerung: Das *kleinste gemeinsame Vielfache* von $p, q \in K[x]$ ist ein Polynom $kgV(p, q) \in K[x]$, so dass:

- p und q teilen $kgV(p, q)$.
- Falls $p \mid f$ und $q \mid f$, gilt auch $kgV(p, q) \mid f$ für alle $f \in K[x]$.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Diese Aufgabe verallgemeinert Korollar 17.3.
Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $T : V \to V$ linear sowie $U_1, U_2 \subseteq V$ T-invariante Unterräume mit $U_1 + U_2 = V$. Für $i \in \{1, 2\}$ sei μ_i das Minimalpolynom von $T|_{U_i} : U_i \to U_i$. Ferner sei μ das Minimalpolynom von T. Zeigen Sie: $\mu = kgV(\mu_1, \mu_2)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 7.1(b).

(a) Sei $A[x] \in Mat_{n\times n}(K[x])$. Also $A[x]$ ist eine $n \times n$-Matrix wo die Einträge Polynomen aus $K[x]$ sind. Für $c \in K$ bezeichnet $A(c)$ die Matrix aus $Mat_{n\times n}(K)$ die man aus $A[x]$ enthält in dem man in allen Einträgen von $A[x]$, $x = c$ ersetzt. Sei $r := rang(A(0))$.

Zeigen Sie, dass $x^{n-r} \mid \det(A[x])$.

Hinweis: Betrachten Sie die reduzierte Zeilenstufenform von $A(0)$.

(b) Wie folgert man die Behauptung von 7.1(b) daraus?