Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 10

Abgabe: 03.07.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 10.1 **(5 Punkte)**

In dieser Aufgabe beweisen Sie Lemma 18.1 und Bemerkung 19.1.
Seien V ein K-Vektorraum und $W_1, ..., W_k$ Unterräume von V. Sei $W := W_1 + ... + W_k$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $W_1, ..., W_k$ sind unabhängig, d.h. falls $\alpha_1 + ... + \alpha_k = 0$ mit $\alpha_i \in W_i$ für $0 < i \leq k$, so ist $\alpha_i = 0$ für $0 < i \leq k$.

(ii) Für jedes j mit $2 \leq j \leq k$ gilt

$$W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1}) = \{0\}.$$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis für W_i $(0 < i \leq k)$, so ist $(\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k)$ eine angeordnete Basis für W.

(iv) Sei nun $U \subseteq V$ ein Unterraum und sei $X := \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ eine linear unabhängige Menge mit $\mathrm{span}(X) \cap U = \{0\}$. Zeigen Sie, dass X zu einer Basis eines Komplements von U ergänzt werden kann.

(v) Zeigen Sie, dass das Komplement eines Unterraums im allgemeinen nicht eindeutig ist.

Aufgabe 10.2 **(3 Punkte)**

In dieser Aufgabe wird Lemma 18.6 bewiesen.
Seien $T : V \to V$ linear, $c \in K$ ein Eigenwert von T, $v_1, ..., v_r \in V$ mit $v_1 \neq 0$ so, dass

$$(T - cI)(v_1) = 0$$

und

$$(T - cI)(v_i) = v_{i-1}$$

für $i = 2, ..., r$, d.h. so, dass $(v_1, ..., v_r)$ eine Jordan Kette der Länge r zum Eigenwert c ist.
Zeigen Sie für $W := \mathrm{Span}\{v_1, ..., v_r\}$:

(i) $\mathcal{B}' := \{v_1, ..., v_r\}$ ist eine Basis für W.

(ii) W ist T-invariant.

(iii)

$$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & c & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.3 **(4 Punkte)**

In dieser Aufgabe beweisen Sie Bemerkung 19.5.

Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $W_1, ..., W_k$ Unterräume von V. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Angenommen $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ und für alle $0 < i \leq k$ ist W_i T-invariant. Sei für jedes $0 < i \leq k$ $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis für W_i und $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k)$. Zeigen Sie, dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T|_{W_k}]_{\mathcal{B}_k} \end{pmatrix}$$

ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Seien $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Sei P das erzeugte Parallelepiped (wie im Bild) und sei V sein Volumen. Zeigen Sie:

$$V = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$