Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 11

Abgabe: 10.07.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 11.1 **(3 Punkte)**

(a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Finden Sie $P \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ so dass $P^{-1}AP$ in Jordan Normalform ist und geben Sie die Jordan Normalform von A an.

(b) Berechnen Sie die Jordan Normalform der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{6\times 6}(\mathbb{R})$$

Aufgabe 11.2 **(5 Punkte)**
Beweisen Sie Folgerungen 21.10 I. bis IV. und die Eigenschaften (1) bis (4) der transponierten Konjugierte danach.

Aufgabe 11.3 **(4 Punkte)**

(a) Sei $(\mid)$ das innere Standardprodukt auf $\mathbb{R}^4$, und seien $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,4,5)$, $v_3 = (1,-3,-4,-2)$. Finden Sie eine Orthonormalbasis (bezüglich $(\mid)$) von $W := \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens.

(b) Sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine vollständige orthonormale Menge in einem inneren Produktraum und sei $y_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf $y_1, ..., y_n$ an und erhalten neue Elemente $z_1, ..., z_n$. Drücken sie $z_1, ..., z_n$ als Linearkombination der x_i aus.

Zusatzaufgabe für Interessierte (dringend empfohlen für diejenigen, die die komplexen Zahlen noch nicht kennen):
In dieser Aufgabe führen wir den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ein, in dem wir ihn mit dem zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ identifizieren. In der B3 werden wir zeigen, dass $\mathbb{C}$ ein *algebreisch abgeschlossener Körper* ist, d.h., dass alle nichtkonstanten Polynome über $\mathbb{C}[x]$ in Linearfaktoren zerfallen.
Sei $\mathbb{C}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Wir versehen $\mathbb{C}$ mit einer Multiplikation $*$ definiert durch

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, +, *)$ ein Körper ist mit $(1, 0)$ als neutralem Element bezüglich $*$.

(b) Für $(a, b) \in \mathbb{C}$ heißt $(a, -b)$ *das komplex Konjugierte von* (a, b). Wir schreiben $\overline{(a, b)} := (a, -b)$. Zeigen Sie, dass für alle $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ gelten:

  (i) $\overline{(a, b) + (c, d)} = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)}$.

  (ii) $\overline{(a, b) * (c, d)} = \overline{(a, b)} * \overline{(c, d)}$.

  (iii) $((a, b)|\overline{(a, b)}) = ||(a, b)||^2$ bezüglich des üblichen inneren Produktes auf $\mathbb{R}^2$ (siehe Beispiel 20.3).

(c) Sei $i := (0, 1), 1 := (1, 0)$ und schreibe $a + ib := (a, b)$. Damit identifizieren wir den Teilkörper $\mathbb{R}$ von $\mathbb{C}$ mit der Menge der Elementen $(a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

  (i) Zeigen Sie, dass $i = \sqrt{-1}$ gilt.

  (ii) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.