Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 12
Hermite'sche Operatoren

Dieses Blatt muss nicht abgegeben werden. *Das Bearbeiten der folgenden Aufgaben ist freiwillig aber dringend empfohlen!*
*Nächste Woche wird kein Übungsblatt ausgegeben, aber eine **Probeklausur** (mit Lösungen) wird veröffentlicht.*

Aufgabe 12.1

(a) Sei $||x||_1 := |x_1| + |x_2|$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $||x||_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Sei $||x||_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $||x||_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 12.2
Beweisen sie die Eigenschaften (i) bis (iv) eines Hermite'schen Opterators aus Bemerkung 22.3.

Aufgabe 12.3

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen inneren Produkt. Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(V, V)$ genau dann eine Isometrie ist, wenn es ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Darstellungsmatrix von T in der kanonischen Basis entweder

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ oder } B_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation für A_θ und B_θ und diagonalisieren Sie B_θ.

(b) Sei jetzt $V = \mathbb{R}^3$ und T eine Isometrie. Wir nehmen an, dass $\det(T) = 1$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Matrix.

Aufgabe 12.4 Schauen Sie nochmal die Zusatzaufgabe auf Blatt 10 an. In der Lösung wurde das Argument gegeben, dass man das Parallelepiped P drehen kann ohne das Volumen zu ändern; somit kann man annehmen, dass die Vektoren, die P definieren, von der Form $\mathbf{a}' = (a'_1, 0, 0)$, $\mathbf{b}' = (b'_1, b'_2, 0)$ und $\mathbf{c}' = (c'_1, c'_2, c'_3)$ sind. Sei T die Isometrie die $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ auf die x-Achse ($T(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$) und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ auf die xy-Ebene ($T(\mathbf{b}) = \mathbf{b}'$) abbildet. Geben Sie eine Matrixdarstellung von T wie in Aufgabe 12.3(b) an.