Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 3

Abgabe: 15.05.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	4	Σ

Aufgabe 3.1 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper. D bezeichnet die formale Ableitung auf $K[x]$. In B1, Aufgabe 10.4 wurde gezeigt, dass $D\colon K[x] \to K[x]$ ein linearer Operator ist.
Berechnen Sie $\ker(D)$ und $\operatorname{im}(D)$ im Fall

(a) $\operatorname{char}(K) = 0$;

(b) $\operatorname{char}(K) = p$ für eine Primzahl p.

Aufgabe 3.2 **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) = 0$

(a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von $x^3 - x^2 + 3$ in 1.

(b) Seien $f_0, \ldots, f_n \in K[x]_{\leq n}$ mit $\deg(f_i) = i$ für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass $\{f_0, \ldots, f_n\}$ eine Basis von $K[x]_{\leq n}$ ist.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}, \quad \mathcal{B}' = \{1, (x-1), (x-1)^2, \ldots, (x-1)^n\}.$$

Nach Teil (b) sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von $K[x]_{\leq n}$. Geben Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ an.

(d) In dieser Teilaufgabe werden Sie den Beweis von Satz 4.5 ergänzen: mit der Notation aus dem Satz, zeigen Sie, dass $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ gilt.

Aufgabe 3.3 **(2 Punkte)**

Diese Aufgabe ist eine Folge zur Aufgabe 1 aus Blatt 2, also haben wir $n \in \mathbb{N}$ und

$$P_i := \prod_{j \neq i} \frac{x - t_j}{t_i - t_j}$$

für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrix von der Basis $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ nach der Basis $\{P_0, ..., P_n\}$

$$\mathcal{V}_n := \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \ldots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \end{pmatrix}$$

ist. Diese Matrix heißt Vandermonde-Matrix.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.

Wir wissen, dass ein Polynom $f \in K[x]$ mit $\deg(f) \leq n$ höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen in K hat. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass f in anderen Bereichen mehr als n Nullstellen haben kann.

$M_n(K)$ bezeichnet die Algebra der $n \times n$-Matrizen über K und I_n die Einheitsmatrix von $M_n(K)$. Für $A \in M_n(K)$ und $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ definiert man $f(A)$ als die Matrix $\sum_{i=0}^{m} a_i A^i$

(a) Sei $A, P \in M_n(K)$ mit P invertierbar und $f \in K[x]$. Zeigen Sie: aus $f(A) = 0$ folgt $f(P^{-1}AP) = 0$.

(b) Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Finden Sie mithilfe von a) drei verschiedene Nullstellen des Polynoms $x^2 - 4$ in $M_2(K)$.

Die folgende Aufgabe d) ist von a),b) unabhängig:

(c) Sei K der Schiefkörper der Quaternionen und $f(x) = x^2 + 1$. Zeigen Sie, dass f unendlich viele Nullstellen in K hat.