Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Lösung zu Blatt 1
Algebren und Polynome

Aufgabe 1.1 **(4 Punkte)**

Erinnerung: $K[[X]]$ bezeichnet die Algebra der Potenzereihen über K, deren Multiplikation durch $(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}$ definiert ist.

Sei K ein Körper.

a) Sei $x = (0, 1, 0, \dots) \in K[[X]]$. Zeigen Sie, dass

$$x^i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-te Stelle}}, 0 \dots)$$

b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation in $K[[X]]$ distributiv ist und dass für jedes $c \in K$ und alle $f, g \in K[[X]]$ gilt: $c(fg) = (cf)g$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[X]$ mit $f + g \neq 0$ gilt

$$deg(f + g) \leq max\{deg(f), deg(g)\}$$

d) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[X]$ mit $deg(f) \neq deg(g)$,

$$deg(f + g) = max\{deg(f), deg(g)\}$$

Lösung:

(a) Wir zeigen dies per Induktion nach n. Es gilt nach Definition $x^1 = (0, 1, 0, \dots)$ also die Aussage stimmt für $n = 1$.

Sei nun $n > 1$ und nehme an, dass für alle $i = 1, \dots, n-1$ gilt

$$x^i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0 \dots).$$

Nun, es gilt $x^n = x \cdot x^{n-1}$. Jetzt wollen wir die Koeffizienten dieses Produkts anschauen. Sei also $m \in \mathbb{N}_0$ und betrachte $(x \cdot x^{n-1})_m$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(x \cdot x^{n-1})_m &= \sum_{j=0}^{m} (x)_j (x^{n-1})_{m-j} \\
&= (x)_1 (x^{n-1})_{m-1} \quad \text{weil } x_j = 0 \text{ für alle } j \neq 1 \text{ und } x_1 = 1 \\
&= (x^{n-1})_{m-1}
\end{aligned}$$

Nun, nach Induktionsvoraussetzung ist

$$(x^{n-1})_{m-1} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

Also

$$x^n = x \cdot x^{n-1} = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-te Stelle}}, 0 \dots).$$

(b) Seien $f, g, h \in K[[x]]$. Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $[f(g+h)]n = (fg + fh)_n$.

$$\begin{aligned}
[f(g+h)]_n &= \sum_{j=1}^{n} f_j (g+h)_{n-j} \quad \text{Produkt zweier Elemente in } K[[x]] \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_j (g_{n-j} + h_{n-j}) \quad \text{Summe in } K[[x]] \\
&= \sum_{j=1}^{n} (f_j g_{n-j} + f_j h_{n-j}) \quad \text{Distributivgesetz in } K \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_j g_{n-j} + \sum_{j=1}^{n} f_j h_{n-j} \quad \text{Assoziativität der Summe in } K \\
&= (fg)_n + (fh)_n \quad n\text{-ter Koeffizient eines Produkts in } K[[x]] \\
&= (fg + fh)_n \quad n\text{-ter Koeffizient einer Summe in } K[[x]]
\end{aligned}$$

(c) Seien $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$ und $g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j$ wobei nur endlich viele f_i's und g_j's nicht null sind. Der Grad fon f ist der größte i mit $f_i \neq 0$ (entsprechend für g). Nach definition ist $f + g = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k + g_k) x^k$. Dann, für alle k mit $k > \deg f$ und $k > \deg g$ gilt $f_k = g_k = 0$. Somit ist $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$.

(d) Sei, ohne Einschränkung, $\deg f = \max\{\deg f, \deg g\}$. Also $\deg f > \deg g$. Lass uns $n := \deg f$ nennen. Dann $g_j = 0$ für alle $j \geq n$; $f_n \neq 0$ und $f_i = 0$ für alle $i > n$. Es folgt $f_n + g_n = f_n \neq 0$ und $f_k + g_k = 0$ für alle $k > n$, also $\deg(f+g) = n = \deg f$.

Aufgabe 1.2 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper.
Erinnerung: Zwei K-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind isomorph als K-Algebren, wenn es einen K-Isomorphismus von Vektorräumen $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gibt mit $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass $K[[X]]$ ein Integritätsbereich ist.

b) Es seien S, T isomorphe K-Algebren. Zeigen Sie, dass S genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn T ein Integritätsbereich ist.

c) Zeigen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ mit Multiplikation $(fg)_n = f_n g_n$ eine K-Algebra mit Einheit ist.

d) Sind $K[[X]]$ und $\mathcal{A}$ isomorph als K-Algebren?

Lösung:

a) Seien $f, g \in K[[X]]$ mit $fg = 0$.

Wir nehmen an, dass $f \neq 0$ und $g \neq 0$. Es gibt dann ein minimales $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f_n \neq 0$ und ein minimales m mit $g_m \neq 0$. Weil $gf = 0$ gilt nach Definition des Produkts: $\sum_{i=0}^{n+m} f_i g_{n+m-i} = 0$. Für $i < n$ gilt nach Minimalität von n $f_i = 0$ und für $i > n$ gilt nach Minimalität von m $g_{n+m-i} = 0$, also ist $0 = \sum_{i=0}^{n+m} f_i g_{n+m-i} = f_n g_m$. Es folgt, dass entweder $f_n = 0$ oder $g_m = 0$, was ein Widerspruch ist.

b) Sei $\phi : S \to T$ ein Isomorphismus. Wir nehmen an, dass T ein Integritätsbereich ist.

Seien $x, y \in S$ mit $xy = 0$. Es gilt $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy) = \phi(0) = 0$. Weil T ein Integritätsbereich ist muss dann $\phi(x) = 0$ oder $\phi(y) = 0$ gelten; OE $\phi(x) = 0$. Weil ϕ ein Isomorphismus ist gilt $Ker(\phi) = \{0\}$, also $x = 0$. Weil x, y beliebig gewählt wurden zeigt dies, dass S ein Integritätsbereich ist.

Für die andere Richtung können wir den gleichen Beweis mit ϕ^{-1} statt ϕ ausführen.

c) einfaches Nachrechnen. Wir müssen nur Bemerken, dass $(1, 1, \dots)$ die Einheit ist und dass beide Operationen komponentweise definiert sind, aslo alle Eigenschaften folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften von K.

d) Nach a) ist $K[[X]]$ ein Integritätsbereich. Wenn $\mathcal{A}$ und $K[[X]]$ isomorph wären, wäre auch $\mathcal{A}$ nach b) ein Integritätsbereich.

$\mathcal{A}$ ist aber kein Integritätsbereich: sei $f := (1, 0, 0, \dots)$ und $g = (0, 1, 0, \dots)$. Dann gilt in $\mathcal{A}$ $f.g = 0$ aber $f, g \neq 0$.

Aufgabe 1.3 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper.
Erinnerung: Seien V ein K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $f \in K[X]$. Für ein Polynom $f := \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ mit $c_i \in K$ definieren wir $f(T) := \sum_{i=0}^{n} c_i T^i$ wobei $T^0 := Id_V$ und $T^i := T \circ T^{i-1}$ (T komponiert mit T^{i-1}).

a) Sei $T : K^3 \to K^3$ der lineare Operator definiert durch:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$$

Sei $f \in K[X]$ das Polynom $f(x) = -x^3 + 2$.

Berechnen Sie $f(T)(x_1, x_2, x_3)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in K$.

Sei K ein Körper und $h \in K[X]$ vom Grad mindestens 1 und definiere die Abblidung:

$\phi_h : K[X] \to K[X]$ durch $f \mapsto f(h)$.

b) Zeigen Sie, dass ϕ_h linear und injektiv ist.

c) Sei $f \in K[X]$. Zeigen Sie, dass $deg(\phi_h(f)) = deg(f)deg(h)$

d) Zeigen Sie, dass ϕ_h genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $deg(h) = 1$

Lösung:
Sei K ein Körper.

a) Es ist $f(x) = -x^3 + 2 = -x^3 + 2x^0$ also $f(T) = -T^3 + 2Id_{K[x]}$.

Zunächst ist $2Id_{K[x]}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$.

Und

$$\begin{aligned} T^3(x_1, x_2, x_3) &= T(T(T(x_1, x_2, x_3))) \\ &= T(T(x_1, x_3, -2x_2 - x_3)) \\ &= T(x_1, -2x_2 - x_3, -x_3 + 2x_2) \\ &= (x_1, 2x_2 - x_3, 2x_2 + 3x_3) \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} f(T)(x_1, x_2, x_3) &= -(x_1, 2x_2 - x_3, 2x_2 + 3x_3) + (2x_1, 2x_2, 2x_3) \\ &= (x_1, x_3, -2x_2 - x_3) \\ &= T(x_1, x_3, -2x_2 - x_3) \end{aligned}$$

und somit $f(T) = T$.

b) ϕ_h ist injektiv: wir zeigen $ker(\phi_h) = \{0\}$.

Sei $n = deg(h)$ und $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in K[X]$ mit $a_m \neq 0$. Es gilt $\phi_h(f) = \sum_{i=0}^{m} a_i h^i$. Wegen der Formel $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$ gilt $deg(h^i) = in$. Insbesondere gilt $deg(h^{i_1}) \neq deg(h^{i_2})$ für $i_1 \neq i_2$, also können wir 1)d) anwenden und wir kriegen $deg(\sum_{i=0}^{m} a_i h^i) = deg(h^m) = nm$. Damit ist c) schon gezeigt. Dies zeigt auch, dass für $f \neq 0$ $deg(\phi_h(f)) = nm \in \mathbb{N}_0$ gilt, also $\phi_h(f) \neq 0$.

c) schon in b) gezeigt.

d) ϕ_h ist immer injektiv, also ist ϕ_h genau dann bijektiv, wenn es surjektiv ist. Nach c) gilt $deg(h) \mid deg(f)$ für alle $f \in Im(\phi_h)$

Wir nehemen an, ϕ_h sei surjektiv. Es gilt insbesondere $X \in Im(\phi_h)$, also $deg(h) \mid 1$, also $deg(h) = 1$.

Wir nehemen an, dass $deg(h) = 1$. Sei $f \in K[X]$, $m = deg(f)$. Nach c) gilt $deg(g) = deg(\phi_h(g))$ für alle $g \in K[X]$, woraus $\phi_h(K_m[X]) \subseteq K_m[X]$ folgt. $\phi_{h|K_m[X]}$ ist also ein injektiver Endomorphismus von $K_m[X]$. Weil $K_m[X]$ endlichdimensional ist folgt die Surjektivität von $\phi_{h|K_m[X]}$ unmittelbar aus seiner Injektivität, also gilt $f \in Im(\phi_{h|K_m[X]}) \subseteq Im(\phi_h)$. Dies zeigt, dass ϕ_h surjektiv ist.