Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Lösung zu Blatt 2
Polynomfunktionen

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden der Skript zur Linearen Algebra 1 und Vorlesungen 1,2,3 aus dem Skript zur Linearen Algebra 2 vorausgesetzt.

Aufgabe 2.1 **(4 Punkte)**
Sei K ein Körper, sei $V := K[x]_{\leq n}$ der Vektorraum aller Polynomen vom Grad $\leq n$ und seien $t_0, \dots, t_n$ paarweise verschiedene Elemente von K. Für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ definieren wir die Abbildung $L_i \in V^*$ durch $L_i(f) := f(t_i)$.

(a) Wir definieren:

$$P_i := \prod_{j \neq i} \frac{x - t_j}{t_i - t_j}$$

Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \{0, \dots, n\}$ $L_i(P_j) = \delta_{i,j}$, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Delta ist.

(b) Folgern Sie aus a), dass $\{L_0, \dots, L_n\}$ eine Basis von V^* ist und $\{P_0, \dots, P_n\}$ eine Basis von V.

Lösung:

(a) Sei $i \in \{0, \dots, n\}$. Für jedes j gilt $\frac{t_i - t_j}{t_i - t_j} = 1$ also $P_i(t_i) = 1$, d.h $L_i(P_i) = 1$. Falls $k \neq i$ ist ein Faktor im Produkt $\prod_{j \neq i} \frac{t_k - t_j}{t_i - t_j}$ null (der Faktor wo $j = k$), also ist das ganze Produkt null, woraus $P_i(t_k) = 0$ folgt, d.h $L_i(P_k) = 0$.

(b) Seien $a_0, \dots, a_n \in K$, so dass $\sum_{i=0}^n a_i L_i = 0$. Es gilt insbesondere für alle $j \in \{0, \dots, n\}$: $\sum_{i=0}^n a_i L_i(P_j) = 0$, also $0 = \sum_{i=0}^n a_i P_j(t_i) = \sum_{i=0}^n a_i \delta_{i,j} = a_j$. Dies zeigt, dass die Familie $\{L_0, \dots, L_n\}$ linear unabhängig ist. Da $\dim V^* = n + 1$ folgt, dass $\{L_0, \dots, L_n\}$ eine Basis von V^* ist.

Mit einem ähnlichen Beweis zeigt man, dass $\{P_0, \dots, P_n\}$ eine Basis von V ist:
Seien $a_0, \dots, a_n \in K$, so dass $\sum_{i=0}^n a_i P_i = 0$. Dann, für alle $j = 1, \dots, n$ gilt

$$0 = L_j \left(\sum_{i=0}^n a_i P_i = 0 \right) = \sum_{i=0}^n a_i L_j(P_i) = \sum_{i=0}^n a_i \delta_{i,j} = a_j.$$

Aufgabe 2.2 **(4 Punkte)**
Sei K ein endlicher Körper.

(a) Sei $c \in K$, $c \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $c^n = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $c^n = c$ für alle $c \in K$. Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon K[x] \longrightarrow K[x]^{\sim}, \quad f \longmapsto \tilde{f}$$

von Polynomen auf Polynomfunktionen (siehe Beispiel 2.6) über endlichen Körpern nicht injektiv ist.

Lösung:

(a) Nach Annahme ist $\{c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich, weil $\{c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$, also existieren $n, m \in \mathbb{N}$ so dass $c^n = c^m$. OE gilt $m < n$. Weil $c \neq 0$ gilt $c^m \neq 0$, also ist c^m invertierbar und es gilt dann $c^{n-m} = 1$.

(b) Nach a) gibt es für alle $c \in K$ mit $c \neq 0$ ein $n_c \in \mathbb{N}$ mit $c^{n_c} = 1$. Sei $N := \prod_{c \in K} n_c$. Für alle $c \neq 0$ gilt

$$c^N = c^{\prod_{d \in K} n_d} = (c^{n_c})^{\prod_{d \neq c} n_d} = (1)^{\prod_{d \neq c} n_d} = 1$$

also $c^{N+1} = c$, und es gilt auch $0^{N+1} = 0$, also $c^{N+1} = c$ für alle $c \in K$.

Sei jetzt Φ die Abbildung von Polynomen auf Polynomfunktionen. Es gilt $\Phi(x^{N+1} - x) = 0 = \Phi(0)$ aber $x^{N+1} - x \neq 0$, also ist Φ ist nicht injektiv.

Aufgabe 2.3 **(4 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende Aussage (Satz 2.8 aus dem Skript).
Seien $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit, $f, g \in K[x]$, $\alpha \in \mathcal{A}$, und $c \in K$. Es gelten

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$.

Lösung: Seien $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ und $g = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j$. Sei auch $l = \max\{m, n\}$ and für alle $n < i \leq l$ (bzw. $m < j \leq l$) setze $f_i = 0$ (bzw. $g_j = 0$). Dann ist $cf + g = \sum_{k=0}^{l} (cf_k + g_k)x^k$ und $fg = \sum_{k=1}^{n+m} h_k x^k$ wobei $h_k = \sum_{i+j=k} f_i g_j$. Jetzt können wir einfach berechnen:

(i)

$$\begin{aligned}
(cf + g)(\alpha) &= \sum_{k=0}^{l} (cf_k + g_k)\alpha^k \\
&= \sum_{k=0}^{l} (cf_k\alpha^k + g_k\alpha^k) \\
&= \sum_{k=0}^{l} cf_k\alpha^k + \sum_{k=0}^{l} g_k\alpha^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} cf_k\alpha^k + \sum_{k=0}^{m} g_k\alpha^k \\
&= cf(\alpha) + g(\alpha).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(fg)(\alpha) &= \sum_{k=0}^{n+m} h_k \alpha^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} f_i g_j \right) \alpha^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} f_i g_j \alpha^{i+j} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} (f_i \alpha^i)(g_j \alpha^j) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i \right) \left(\sum_{j=0}^{m} g_j \alpha^j \right) \\
&= f(\alpha) g(\alpha).
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht Korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.

Erinnerung: Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra und S eine Teilmenge von $\mathcal{A}$. Die von S erzeugte K-Algebra ist der Schnitt aller K-Algebren, die S enthalten (es ist also die kleinste K-Algebra, die S enthält).

Sei $\mathcal{A}$ die von $\{x^2, x^3\}$ erzeugte $\mathbb{R}$-Algebra in $\mathbb{R}[x]$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Algebren nicht isomorph sind, obwohl sie als $\mathbb{R}$-Vektorräume isomorph sind. Wir nehmen an, es existiere einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren: $\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = span(\{x^k \mid k \neq 1\})$ und geben Sie dann eine kurze Erklärung, warum $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-**Vektorräume** isomorph sind.

    Hinweis: jede Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Linearkombination von 2 und 3 schreiben.

(b) Sei $h := \Phi(x)$. Zeigen Sie $\Phi = \phi_h$, wobei ϕ_h wie in Aufgabe 3 definiert ist.

(c) Folgern Sie aus Aufgabe 1.3 (Blatt 1) , dass $\deg(h) = 1$ gelten muss. Beachten Sie, dass wir 1.3(d) nicht anwenden können.

(d) Folgern Sie aus c), dass $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Algebren nicht isomorph sind.

Lösung:

(a) Setze $E := span(\{x^k \mid k \neq 1\})$. Offensichtlich gilt $x^2, x^3 \in E$, also ist E ein $\mathbb{R}$-Algebra, die x^2, x^3 enthält, woraus $\mathcal{A} \subseteq E$ folgt.

    Um $E \subseteq \mathcal{A}$ zu zeigen ist es ausreichend, zu prüfen, dass $x^n \in \mathcal{A}$ für alle $n > 1$. Für $n = 2, 3$ folgt es unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{A}$. Sei $n > 3$. Falls $2 \mid n$ gilt $x^n = (x^2)^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, woraus $x^n \in \mathcal{A}$ folgt. Wir nehmen an, dass $2 \nmid n$; es gilt dann $2 \mid n-3$, also $x^n = (x^2)^k x^3$ für ein $k \in \mathbb{N}$, woraus $x^n \in \mathcal{A}$ folgt.

Wir definieren die lineare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}[x] \to \mathcal{A}$ durch $1 \mapsto 1, x^n \mapsto x^{n+1}$ für alle $n > 0$. Da $\{1, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ eine Basis von $\mathcal{A}$ ist, können wir sofort sehen, dass Ψ ein Vektorraumisomorphismus ist.

(b) Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. Es gilt $\Phi(f) = \Phi(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi(x)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i h^i = \phi_h(f)$. Bemerken Sie, dass diese Gleichheit gilt, weil Φ ein Isomorphismus von Algebren ist; es wäre im allgemeinen falsch, wenn Φ nur ein Vektorraumisomorphismus wäre.

(c) nach 1.3(c) gilt $\deg(h) \mid \deg(f)$ für jedes $f \in Im(\Phi)$. Da Φ surjektiv ist gilt aber $x^2, x^3 \in Im(\Phi)$, woraus $\deg(h) \mid 2$ un $\deg(h) \mid 3$ folgt, also $\deg(h) = 1$.

(d) Nach (c) ist $\deg(h) = 1$, also $h \notin span(\{x^k \mid k \neq 1\}) = \mathcal{A}$: Widerspruch. Die Annahme war also falsch: es gibt kein solcher Isomorphismus Φ.