Prof. Dr. S. Kuhlmann, Universität Konstanz
S. Müller, Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Serra
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Lösung zu Blatt 3

Abgabe: 15.05.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	4	Σ

Aufgabe 3.1 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper. D bezeichnet die formale Ableitung auf $K[x]$. In B1, Aufgabe 10.4 wurde gezeigt, dass $D\colon K[x] \to K[x]$ ein linearer Operator ist.
Berechnen Sie $\ker(D)$ und $\mathrm{im}(D)$ im Fall

(a) $\mathrm{char}(K) = 0$;

(b) $\mathrm{char}(K) = p$ für eine Primzahl p.

Lösung:

(a) Sei $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x]$ mit $D(f) = 0$. Sei $n = \deg f$, also $a_n \neq 0$. Dann

$$\begin{aligned} D(f) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} = 0 &\iff a_n x^{n-1} = 0 \\ &\iff x^{n-1} = 0 \text{ weil } a_n \neq 0 \text{ und } \mathrm{char}\, K = 0 \\ &\iff n - 1 < 0 \\ &\iff n \leq 0 \\ &\iff f \in K. \end{aligned}$$

Dies zeigt $\ker(D) = K$.

Sei nun $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ beliebig. Aus der Definition von D folgt, dass

$$D\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = f$$

gilt. Also D ist surjektiv und somit $\mathrm{im}(D) = K[x]$. Bemerke, dass $\frac{a_i}{i+1} \in K$ wohldefiniert ist, für alle $i = 0, \ldots, n$, weil $\mathrm{char}\, K = 0$.

(b) <u>Behauptung: $\ker(D) = K[x^p]$.</u>

Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i (X^p)^i \in K[X^p]$. Es gilt $D(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i ip(X^{ip-1}) = 0$ weil $p = 0$, also $f \in \ker(D)$. Umgekehrt: sei $f \in \ker(D)$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Es gilt $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i i X^{i-1}$, also $a_i i = 0$ für alle $i \geq 1$. Falls $a_i \neq 0$ muss also $i \in p\mathbb{N}$ gelten, also $i = pk_i$ für ein geeignetes $k_i \in \mathbb{N}$. Es gilt also $f = \sum_{i=0} a_i X^{pk_i} = \sum_{i=0}^{n} a_i (X^p)^{k_i} \in K[X^p]$.

Behauptung: $\mathrm{im}(D) = \mathrm{span}\{X^n \mid n+1 \notin p\mathbb{N}\}$.

Sei $f = D(g) \in \mathrm{im}(D)$. Schreibe $g = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, also $f = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$. Wenn $i \in p\mathbb{N}$ gilt $i = 0$, also ist der Koeffizient von X^{i-1} in f null, woraus $f \in \mathrm{span}\{X^n \mid n+1 \notin p\mathbb{N}\}$ folgt.

Umgekehrt: sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathrm{span}\{X^n \mid n+1 \notin p\mathbb{N}\}$. Definiere für alle i den Koeffizient: $b_i := 0$ wenn $i+1 \in p\mathbb{N}$ und $b_i = \frac{a_i}{i+1}$ sonst. Es gilt dann $D(\sum_{i=0}^n b_i X^{i+1}) = f$

Aufgabe 3.2 **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$

(a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von $x^3 - x^2 + 3$ in 1.

(b) Seien $f_0, \dots, f_n \in K[x]_{\leq n}$ mit $\deg(f_i) = i$ für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass $\{f_0, \dots, f_n\}$ eine Basis von $K[x]_{\leq n}$ ist.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}, \quad \mathcal{B}' = \{1, (x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^n\}.$$

Nach Teil (b) sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von $K[x]_{\leq n}$. Geben Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ an.

(d) In dieser Teilaufgabe werden Sie den Beweis von Satz 4.5 ergänzen: mit der Notation aus dem Satz, zeigen Sie, dass $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ gilt.

Lösung:

(a) Wir nennen $p(x) = x^3 - x^2 + 3$.

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= p & p(1) &= 3 \\ p'(x) &= 3x^2 - 2x & p'(1) &= 1 \\ p''(x) &= 6x - 2 & p''(1) &= 4 \\ p''' &= 6 & p'''(1) &= 6 \end{aligned}$$

Also

$$f = \sum_{i=0}^{3} \frac{p^{(i)}(1)}{i!}(x-1)^i = 3 + (x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

(b) Wir beweisen dies per Induktion nach n. Im Fall $n = 0$ haben wir nur ein Polynom von Grad 0, was sicherlich linear unabhängig ist.

Sei nun $n > 0$. Wir nehmen an, dass für n Polynome $f_0, \dots, f_{n-1}$ mit $\deg f_i = i$ immer linear unabhängig sind[1]. Seien nun $f_0, \dots, f_n \in K[x]$ und seien $c_0, \dots, c_n \in K$ mit $f(x) := \sum_{i=0}^n c_i f_i = 0$. Schreibe $f_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x + \ldots + a_{i,i}x^i$. Die Voraussetzung $\deg f_i = i$ impliziert $a_{i,i} \neq 0$ für alle i. Nun, $\deg f(x) = n$ und $c_n a_{n,n}$ ist das Koeffizient von x^n. Aus $a_{n,n} \neq 0$ und $\mathrm{char}\, K = 0$ folgt $c_n = 0$. Also $\sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i = 0$. Die Induktionsvoraussetzung impliziert nun, dass auch $c_0 = \ldots = c_{n-1} = 0$.

[1]Die formale Induktionsvoraussetzung ist, dass $f_0, \dots, f_{n-1}$ mit $\deg f_i = i$ immer linear unabhängig **in $\mathbf{K[x]_{\leq n-1}}$** sind. Die Bedingung der linearen Unabhängigkeit in $K[x]_{\leq n-1}$ ist aber, dass für alle $c_0, \dots, c_{n-1} \in K$ gilt $\sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i = 0 \Rightarrow \forall i \ c_i = 0$. Und diese ist die Bedingung der linearen Unabhängigkeit im ganzen $K[x]$, also insbesondere in $K[x]_{\leq n}$.

(c) Sei P die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$. Der Koeffizient $P_{i,j}$ von P ist die i-te Koordinate in $\mathcal{B}$ des Polynoms $(X-1)^j$. Die binomische Formel ergibt $(X-1)^j = \sum_{k=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} (-1)^{j-k}X^k$. Es gilt also $P_{i,j} = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} (-1)^{j-i}$ fall $i \leq j$ und $P_{i,j} = 0$ falls $j < i$.

(d) Es ist $p_i = \frac{(x-a)^i}{i!}$ und $l_j(p_i) = p_i^{(j)}(a)$. Die Ableitung ist linear, also wir haben $p_i^{(j)} = \frac{1}{i!}[(x-a)^i]^{(j)}$. Weiter, da $(x-a)' = 1$ folgt

$$[(x-a)^i]^{(j)} = i[(x-a)^{i-1}]^{(j-1)} = \ldots = i(i-1)\cdots(i-j+1)(x-a)^{i-j}$$

Dieses Polynom ist das konstante Polynom 1 wenn $i = j$ und ist der Form $c(x-a)^m$, mit $c \in K$ und $m \in \mathbb{N}$ wenn $i \neq j$. Die Behauptung folgt.

Aufgabe 3.3 **(2 Punkte)**

Diese Aufgabe ist eine Folge zur Aufgabe 1 aus Blatt 2, also haben wir $n \in \mathbb{N}$ und

$$P_i := \prod_{j \neq i} \frac{x - t_j}{t_i - t_j}$$

für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrix von der Basis $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ nach der Basis $\{P_0, ..., P_n\}$

$$\mathcal{V}_n := \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \ldots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \end{pmatrix}$$

ist. Diese Matrix heißt Vandermonde-Matrix.
Lösung: Seien $L_i \in V^*$ definiert durch $L_i(f) := f(t_i)$ (vgl. Aufgabe 2.1). In Aufgabe 2.1(a) wurde gezeigt, dass $\{L_1, \ldots, L_n\}$ die duale Basis zu $\{P_0, \ldots, P_n\}$ ist gilt. Es Folgt, dass die Koordinaten eines Elements $f \in K[x]_{\leq n}$ bezüglich $\{P_0, \ldots, P_n\}$ genau die $L_i(f)$'s sind: $f = \sum_{i=0}^{n} L_i(f)P_i$. Insbesondere, die Koordinaten von x^k bezüglich $\{P_0, \ldots, P_n\}$ sind genau $L_0(x^k) = t_0^k, \ldots, L_n(x^k) = t_n^k$ für $k = 0, \ldots, n$. Die Basiswechselmatrix ist die Matrix wo die Spalten die Koordinaten der x^k's bezüglich $\{P_0, \ldots, P_n\}$ sind: $\mathcal{V}_n$.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.

Wir wissen, dass ein Polynom $f \in K[x]$ mit $\deg(f) \leq n$ höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen in K hat. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass f in anderen Bereichen mehr als n Nullstellen haben kann.

$M_n(K)$ bezeichnet die Algebra der $n \times n$-Matrizen über K und I_n die Einheitsmatrix von $M_n(K)$. Für $A \in M_n(K)$ und $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ definiert man $f(A)$ als die Matrix $\sum_{i=0}^{m} a_i A^i$

(a) Sei $A, P \in M_n(K)$ mit P invertierbar und $f \in K[x]$. Zeigen Sie: aus $f(A) = 0$ folgt $f(P^{-1}AP) = 0$.

(b) Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Finden Sie mithilfe von a) drei verschiedene Nullstellen des Polynoms $x^2 - 4$ in $M_2(K)$.

Die folgende Aufgabe (c) ist von (a) und (b) unabhängig:

(c) Sei K der Schiefkörper der Quaternionen und $f(x) = x^2 + 1$. Zeigen Sie, dass f unendlich viele Nullstellen in K hat.

Lösung:

(a) Wir können eigentlich mehr zeigen, nähmlich: $f(PAP^{-1}) = Pf(A)P^{-1}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $(PAP^{-1})^n = PAP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1} \dots PAP^{-1}PAP = PA^nP^{-1}$.

Sei jetzt $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$. Es gilt $f(PAP^{-1}) = \sum_{i=0}^n a_i (PAP^{-1})^i = \sum_{i=0}^n a_i PA^iP^{-1} = P(\sum_{i=0}^n a_i A^i)P^{-1} = Pf(A)P^{-1}$

(b) Bemerke, dass die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ eine Nullstelle des Polynoms ist. Wir wählen dann zwei invertierbare Matrizen P_1, P_2, so dass $A, P_1AP_1^{-1}$ und $P_2AP_2^{-1}$ paarweise verschieden sind; nach a) ist jede dieser Matrizen eine Nullstelle des Polynoms. Wir können zum Beispiel

$P_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $P_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wählen.

(c) Wir benutzen die Darstellung der Quaternionen als Paar von komplexen Zahlen: jedes $q \in K$ lässt sich als ein Paar (a, b) mit $a, b \in \mathbb{C}$ darstellen. Der Produkt ist gegeben durch $(a, b)(c, d) = (ac - b\bar{d}, b\bar{c} + da)$, wobei $\bar{a}$ die zu a konjugierte Zahl bezeichnet.

Sei $q \in K$ mit $q^2 = -1$. Schreibe $q = (a, b)$. Es gilt dann $(a^2 - b\bar{b}, b\bar{a} + ba) = (-1, 0)$, also $a^2 - |b|^2 = -1$ und $b.2Re(a) = 0$. Falls $Re(a) = 0$ wird die erste Gleichung zu $|b|^2 = 1 - Im(a)^2$. Daraus folgt die Behauptung:

Behauptung: für jedes $r \in \mathbb{R}$ mit $r < 1$ und jedes $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| = \sqrt{1 - r^2}$ gilt $(ri, b)^2 = -1$.

Jedes solche Paar (ir, b) ist also eine Nullstelle des Polynoms, insbesondere gibt es unendlich viele.