Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 5
Die symmetrische Gruppe S_n

Abgabe: 29.05.2020.

Aufgabe 5.1 **(4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass $|S_n| = n!$.

Hinweis: Sie können eine Induktion auf n durchführen und ein geeignetes $\tau \in S_n$ finden, so dass $\tau\sigma$ ein Element von S_{n-1} ist.

(b) Sei $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ ein m-Zyklus in S_n. Zeigen Sie, dass $\sigma^{-1} = (i_m, i_{m-1}, \dots, i_2, i_1)$ gilt.

Lösung:

(a) Wir zeigen dies per Induktion nach n.
Fall: $n = 1$. Die einzige Permutation einer einelementigen Menge ist die Identität, also $|S_1| = 1 = 1!$.
Induktionsvoraussetzung: Für alle $m < n$ gilt $|S_m| = m!$. Insbesondere $|S_{n-1}| = (n-1)!$
Induktionsschritt: wir zeigen, dass es eine Bijektion gibt zwischen den Mengen S_n und $X := S_{n-1} \times \{1, 2, \dots, n\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $|S_{n-1}| = (n-1)!$ und somit $|X| = (n-1)! \times n = n!$.

Sei $\sigma \in S_n$ beliebig. Sei $\tau \in S_n$ die Transposition $(n\ \sigma(n))$. Dann ist $\tau\sigma(n) = n$, d.h., $\mathrm{supp}(\tau\sigma) \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ und somit $\tau\sigma \in S_{n-1}$. Die Abbildung

$$\xi\colon S_n \to X := S_{n-1} \times \{1, 2, \dots, n\},\ \sigma \mapsto (\tau\sigma, \sigma(n))$$

ist somit surjektiv, da für jedes Paar (α, p) mit $p \in \{1, \dots, n\}$ und $\alpha \in S_{n-1}$ gibt es eine $\sigma \in S_n$, nämlich $\sigma = (p\ n)\alpha$ (wobei wir α als Element aus S_n mit $\mathrm{supp}(\alpha) \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ auffassen).

Die Abbildung ist auch injektiv, da für $\sigma \neq \sigma'$ gilt: entweder $\sigma(n) \neq \sigma'(n)$ und dann $\xi(\sigma) \neq \xi(\sigma')$; oder $\sigma(n) = \sigma'(n)$ und $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$ für $i < n$. Dann $\tau = (n\ \sigma(n)) = \tau' = (n\ \sigma'(n))$ und somit $\tau\sigma \neq \tau'\sigma'$.

(b) Es reicht die zwei Zyklen hintereinander zu Berechnen um die Identität zu erhalten.

Aufgabe 5.2 **(3 Punkte)**

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jedes $\sigma \in S_n$ sich als Produkt von Zyklen mit paarweise disjunkten Trägern darstellen lässt.
Zeigen Sie, dass diese Darstellung bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

Lösung: Seien $\sigma = \rho_1 \cdots \rho_r = \tau_1 \cdots \tau_s$ zwei Zerlegungen von σ in Produkte von disjunkten Zyklen. Sei $i \le r$ und sei $m \in \operatorname{supp}(\rho_i)$. Da disjunkte Permutationen kommutieren (Aufgabe 4.3(b)) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $i = 1$, und schreiben $\rho := \rho_1$. Nun, $m \in \operatorname{supp}(\rho) \Rightarrow m \in \operatorname{supp}(\sigma)$ also existiert $j \le s$ mit $m \in \operatorname{supp}(\tau_j)$. Ähnlich wie oben können wir annehmen, dass $j = 1$ und schreiben $\tau := \tau_1$.
Nun, ein Zyklus $(i_1\ i_2\ \dots\ i_l)$ ist gleich dem Zyklus $(i_2\ \dots\ i_l\ i_1)$, sowie dem $(i_l\ i_1\ \dots\ i_{l-1})$ usw. Wir können also beide Zyklen ρ und τ schreiben mit m an der ersten Stelle: $\rho = (m\ \sigma(m)\ \dots\ \sigma^h(m))$ und $\tau = (m\ \sigma(m)\ \dots\ \sigma^k(m))$. Also ρ und τ unterscheiden sich nur um die Länge. Angenommen $h \ne k$, und ohne Einschränkung $h < k$, dann ist $\sigma^{h+1}(m) = m$, weil ρ ein Zyklus ist, aber $\sigma^{h+1}(m) \ne m$ weil τ ein Zyklus der Länge $\ge h+1$ ist. Der Widerspruch zeigt, dass $h = k$ und somit $\rho = \tau$.
Angenommen $r \ne s$ und ohne Einschränkung $r < s$. Wir wiederholen das gleiche wie oben für die andere Zyklen $\rho_2, \dots, \rho_r$ und finden Zyklen $\tau_2, \dots, \tau_r$ mit $\rho_i = \tau_i$. Dann

$$(\rho_1 \cdots \rho_r)^{-1}(\rho_1 \cdots \rho_r) = \mathrm{id} = (\rho_1 \cdots \rho_r)^{-1}(\tau_1 \cdots \tau_r)\tau_{r+1} \cdots \tau_s = \tau_{r+1} \cdots \tau_s$$

was auch ein Widerspruch ist.

Aufgabe 5.3 **(5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe S_n genau dann kommutativ ist, wenn $n \le 2$.

(b) Sei A_n die alternierende Gruppe (Definition 7.10). Zeigen Sie, dass die Menge aller 3-Zyklen die Gruppe A_n erzeugt, falls $n \ge 3$. (Eine Teilmenge M einer Gruppe G erzeugt G, falls jedes Element aus G das Produkt von Elementen aus M und Inversen von Elementen aus M ist.)

Lösung:

(a) Für $n \ge 3$ sehen wir, dass die Transpositionen $(1\ 2)$ und $(1\ 2)$ nicht kommutieren:

$$(1\ 2)(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 3 & 1 & 2 & \dots \end{pmatrix}, \quad (1\ 3)(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2 & 3 & 1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Für $n = 1$ ist $S_1 = \{\mathrm{id}\}$ was offensichtlich kommutativ ist. Für $n = 2$ ist $S_2 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ und $\mathrm{id}(1\ 2) = (1\ 2)\,\mathrm{id}$ (die Identität kommutiert mit allem), und alles kommutiert mit sich selbst. Also S_2 ist auch kommutativ.

(b) Sei $n \ge 3$. Wir müssen zeigen, dass sich jede Permutation $\sigma \in A_n$ als Produkt von 3-Zyklen darstellen lässt. Wir wissen, dass sich jede $\sigma \in A_n$ als Produkt einer gerade Anzahl von Transpositionen darstellen lässt: $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k}$. Es genügt zu zeigen, dass jedes Produkt zweier Transpositionen $(a\ b)(c\ d)$ eine Darstellung als Produkt von 3-Zyklen besitzt. Man sieht einfach, dass $(a\ b)(c\ d) = (d\ a\ c)(a\ b\ d)$ gilt.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.

Sei $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $\tau^{n!} = \mathrm{id}$ für alle $\tau \in S_n$.

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst, was die l-te Potenz eines m-Zyklus ist.

Lösung:
Sei $c \in S_n$ ein Zyklus. Wir zeigen zunächst, dass $c^{n!} = \mathrm{id}$ gilt. Sei $l \leq n$ die Länge von c. Dann ist $c = (i\ \sigma(i)\ \ldots\ \sigma^{l-1}(i))$ und somit c^l ist so dass $c^l(i) = \sigma^l(i) = i$, $c^l(\sigma(i)) = \sigma^{l+1}(i) = \sigma(i)$ usw., also $c^l = \mathrm{id}$. Nun, aus $l \leq n$ folgt $l|(n!)$. Schreibe $n! = lk$. Also $c^{n!} = (c^l)^k = \mathrm{id}^k = \mathrm{id}$.
Sei nun $\tau \in S_n$. Wir schreiben τ als Produkt von disjunkten Zyklen: $\tau = c_1, \ldots c_n$. $c_1, \ldots, c_n$ kommutieren, also gilt $\tau^k = c_1^k \ldots c_n^k$ für alle k. Aus $c_i^{n!} = \mathrm{id}$ folgt die Behauptung.