Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 6
Multilineare Formen

Abgabe: 05.06.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 6.1 **(3 Punkte)**
Sei K ein Körper und sei $\mathbb{A} = alt^{(n)}(K^n)$ die Menge aller n-linearen alternierenden Formen auf K^n (Definition 9.6).
Beweisen Sie Bemerkung 9.7: $\mathbb{A}$ ist ein K-Unterraum von $L^{(n)}(K^n \times \ldots \times K^n; K)$.

Lösung: $W := L^{(n)}(K^n \times \ldots \times K^n; K)$ ist ein Vektorraum und $\mathbb{A}$ ist eine Teilmenge davon. Wir müssen nur zeigen, dass $\mathbb{A}$ abgeschlossen bezüglich linearen Kombinationen ist. Seien $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{A}$ und $r, s \in K$. Weiter, seien $z_1, \ldots, z_n \in K^n$ und seien $i \neq j$ mit $z_i = z_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(r\delta_1 + s\delta_2)(z_1, \ldots, z_n) &= r\delta_1(z_1, \ldots, z_n) + s\delta_2(z_1, \ldots, z_n)\\ &= r \cdot 0 + s \cdot 0 = 0 \quad \text{weil } \delta_1, \delta_2 \text{ alternierend sind.}\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2 **(5 Punkte)**
Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

(a) Sei $\delta\colon V^n \to K$ ein n-lineares alternierendes Funktional (Definition 8.5). Beweisen Sie die Aussage von Bemerkung 8.7:
für alle $\pi \in S_n$ gilt $\delta(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) = Sign(\pi)\delta(z_1, \ldots, z_n)$.

(b) Wir sagen, dass δ trivial ist, wenn $\delta(z_1, ..., z_n) = 0$ für alle $z_1, ..., z_n \in V$. Sei $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass δ genau dann trivial ist, wenn $\delta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$.

(c) Sei U ein r-dimensionaler Unterraum von V, seien $x_{r+1}, ..., x_n$ feste Vektoren in V und sei $\delta : V^n \to K$ ein n-lineares alternierendes Funktional. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\delta_U : U^r \to K$$

definiert durch

$$\delta_U(u_1, ..., u_r) := \delta(u_1, ..., u_r, x_{r+1}, ..., x_n)$$

ein alternierendes r-lineares Funktional ist. Wann ist δ_U nicht trivial? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Es wurde schon in im Skript für σ Transposition bewiesen (Lemma 8.6(ii)). Wir benutzen dann die Tatsache, dass jede Permutation ein Produkt von Transpositionen ist.

(b) Seien $z_1, \ldots, z_n \in V$. Nach n-Linearität lässt sich $\delta(z_1, \ldots, z_n)$ als Linearkombination der $\delta(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})$ für alle $\sigma \in S_n$ schreiben. Nach (a) folgt aber $\delta(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}) = 0$ aus $\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

(c) Nach (b) ist δ_U genau dann trivial, wenn $\delta_U(u_1, \ldots, u_r) = 0$, wobei $(u_1, \ldots u_r)$ eine Basis von U ist. Falls δ nicht trivial ist, gilt $\delta(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = 0$ genau dann, wenn $u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ linear abhängig sind. δ_U ist also genau dann trivial, wenn δ trivial ist oder $x_{r+1}, \ldots, x_n$ linear abhängig sind order $U \cap span(\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}) \neq \emptyset$.

Aufgabe 6.3 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$. Sei

$$\delta(A) := \sum_{\pi \in S_n} Sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

wie im Satz 9.10. Ergänzen Sie den Beweis von Satz 9.10 im allgemeinen Fall:

(a) Zeigen Sie, dass δ n-linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass wenn $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $z_i = z_j$ existieren, dann $\delta(A) = 0$.

Lösung:

(a) Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen von A damit $\delta(A) = \delta(z_1, \ldots, z_n)$.

Sei nun $i \in \{1, \ldots, n\}$. Seien $c \in K$ und $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$. Dann

$$\begin{aligned}
\delta(z_1, \ldots, x + cy, \ldots, z_n) &= \sum_{\pi \in S_n} Sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots (x + cy)_{\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} Sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots (x_{\pi(i)} + cy_{\pi(i)}) \cdots a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} Sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots x_{\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} + \\
&\quad \sum_{\pi \in S_n} Sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots cy_{\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} \\
&= \delta(z_1, \ldots, x, \ldots, z_n) + c\delta(z_1, \ldots, y, \ldots, z_n).
\end{aligned}$$

(b) Im Beweis von Satz 9.10 ersetze die Transposition (1 2) mit einer beliebigen Transposition $(i\ j)$. Der Rest bleibt identisch.

Zusatzaufgabe für Interessierte

Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie wird nicht korrigiert aber eine Musterlösung wird veröffentlicht.

In dieser Aufgabe beweisen wir die folgende Aussage:
Kleiner Fermatscher Satz: Für jede Primzahl p und jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

(a) Begründen Sie kurz, dass die Behauptung aus der folgenden Aussage folgt:
für jede Primzahl p und jedes $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Jetzt beweisen wir die Aussage aus (a): seien p prim und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Vielfache $0, a, 2a, \ldots, (p-1)a$ paarweise unterschiedlich mod p sind.

(c) Folgern Sie, dass

$$1 \cdot 2 \cdots (p-1)a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod{p}$$

gilt.

(d) Schließen Sie, dass $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ gilt.

Lösung:

(a) Angenommen die Aussage gilt. Für $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ (also für $p \nmid a$) multipliziere beide Seiten der Kongruenz $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ mit a und bekomme $a^p \equiv a \pmod{p}$. Falls $p \mid a$ dann $a^p = 0 = a \pmod{p}$ und die Behauptung gilt sowieso.

(b) Angenommen $ra \equiv sa \pmod{p}$ für $r \neq s \in \{0, \ldots, p-1\}$ dann $(r-s)a \equiv 0 \pmod{p}$. Dann teilt p entweder a oder $r - s$. Aber $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ nach Voraussetzung und $|r - s| < p$, also das ist unmöglich.

(c) Nach (b) sind $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ unterschiedlich, sie sind alle $\neq 0$ und sie sind $(p-1)$ elemente aus $\mathbb{F}_p$. Also sie sind alle die nicht nulle Elemente aus $\mathbb{F}$, d.h.:

$$\{a, 2a, \ldots, (p-1)a\} = \{1, 2, \ldots, (p-1)\} \pmod{p}.$$

Also das Produkt aller Elementen aus der ersten Menge ist gleich das Produkt aller Elementen aus der zweiten:

$$1 \cdot 2 \cdots (p-1)a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod{p}$$

(d) Aus der letzten Kongruenz, mit $k := 1 \cdot 2 \cdots (p-1)$ folgt $k(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$. Da $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist folgt, dass entweder $k \equiv 0 \pmod{p}$ oder $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Aber p teilt keinen der Faktoren von k, also $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, wie behauptet.