Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Lösung zu Blatt 7
Determinante

Abgabe: 12.06.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper und seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1, f_2 \in K$. Ohne Berechnung, erklären Sie warum

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(b) Sei $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ und alle Einträge seien entweder 1 oder -1. Beweisen Sie, dass $\det A \in \mathbb{Z}$ und teilbar durch 2^{n-1} (in $\mathbb{Z}$) ist.

Lösung:

a) Die letzte drei Zeilen sind linear abhängig. In der Tat, eine Linearabhängigkeitsbeziehung existiert wenn es eine nicht triviale Lösung zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{cases} xc_1 + yd_1 + zf_1 = 0 \\ x_2c + yd_2 + zf_2 = 0 \end{cases}$$

existiert. Und sie existiert immer, weil es mehr Variablen als Gleichungen gibt, also eine der Variablen kann immer frei gewählt werden.

b) Wir addieren die erste Zeile zu jeder der anderen Zeilen. Dann liegen die Koeffizienten der letzten $n-1$ Zeilen in $\{0, 2, -2\}$. Wir können dann jede dieser Zeilen durch 2 teilen und daher ist $\det(A) = 2^{n-1} \det(B)$, wobei B eine Matrix mit Koeffizienten in $\{0, -1, 1\}$ ist.

Aufgabe 7.2 (3 Punkte)

(a) Seien $a, b, c, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Seien $A := (a, r_1, b, r_2)$ (A ist also die 4×4-Matrix, die a, r_1, b, r_2 als Spalten hat), $B := (c, r_1, a, r_2)$ und $C := (b, r_1, c, r_2)$ mit $\det A = 3$ und $\det B = 2$ und $\det C = 1$.

Finden Sie $\det(A + B)$.

(b) Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 9 \\ 10 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{F}_{11}$.

Lösung:

a) Nach 4-Linearität der Determinante gilt $\det(A+B) = \det(a, 2r_1, a, 2r_2) + \det(a, 2r_1, b, 2r_2) + \det(c, 2r_1, a, 2r_2) + \det(c, 2r_1, b, 2r_2)$.

Es gilt $\det(a, 2r_1, a, 2r_2) = 0$, $\det(a, 2r_1, b, 2r_2) = 4\det(a, r_1, b, r_2) = 12$, $\det(c, 2r_1, a, 2r_2) = 4\det(c, r_1, a, r_2) = 8$ und $\det(c, 2r_1, b, 2r_2) = -4\det(b, r_1, c, r_2) = -4$, also $\det(A+B) = 16$.

b) Man kann die Determinante über $\mathbb{R}$ berechnen und dann modulo 11 reduzieren. Einfacher ist die Matrix wieder zu schreiben, mit allen Einträge in $\{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$ und sie in rZSF zu bringen. Das macht das Rechnen viel einfacher.

Die Antwort ist -2.

Aufgabe 7.3 **(5 Punkte)**

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbare Matrizen. Zeigen Sie, dass:

(a) (i) $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\,\mathrm{adj}(A)$

(ii) $\det(\mathrm{adj}\, A) = (\det A)^{n-1}$

(iii) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\, A) = (\det A)^{n-2} A$

(b) Benutzen Sie die Cramersche Regel, um das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_5$ zu lösen:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 4 \end{array}$$

Lösung:

a) Erinnerung: Lemma 11.6: $adj(A)A = \det(A)I_n$. Daraus folgt $adj(A) = \det(A)A^{-1}$.

(i)

$$\begin{aligned} adj(AB) &= \det(AB)(AB)^{-1} \\ &= \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1} \\ &= \det(B)B^{-1}\det(A)A^{-1} \\ &= adj(B)adj(A). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\det(adj(A)) &= \det(\det(A)A^{-1})\\ &= \det(A)^n \det(A^{-1})\\ &= \det(A)^n \det(A)^{-1}\\ &= \det(A)^{n-1}.\end{aligned}$$

(iii) Immer aus $adj(A) = \det(A)A^{-1}$ folgt $adj(adj(A)) = \det(adj(A))(adj(A)^{-1})$. Nun

$$\begin{aligned}\det(adj(A))(adj(A)^{-1}) &= \det(A)^{n-1}(\det(A)A^{-1})^{-1} \quad \text{aus (ii) und Lemma 6.11}\\ &= \det(A)^{n-1}\det(A)^{-1}A\\ &= \det(A)^{n-2}A\end{aligned}$$

b) Wir können das als Matrixgleichung $Ax = b$ schreiben, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}.$$

Dann, die Cramersche Regel sagt uns, dass die Lösung ist

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Also A_i erhalten wir von A in dem wir die i-te Spalte durch b ersetzen.
Rechnen ergibt $\det(A) = 1$ und somit

$$\begin{cases} x_1 = \det(A_1) = -1\\ x_2 = \det(A_2) = 3\\ x_3 = \det(A_3) = -1\end{cases}$$

Es wurde nie durch 5 dividiert also die Lösung ist die Gleiche in $\mathbb{F}_5$.

Zusatzaufgabe für Interessierte
Sei $n \geq 2$. Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ und sei

$$V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1}\\ & & \ldots & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

die Vandermonde-Determinante.

Zeigen Sie mit Induktion über n, dass $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$.

Lösung: Wir machen die Spaltenoperationen $S_i \to S_i - (x_1 S_{i-1})$ für $i \in \{2, \ldots, n\}$. Die erste Zeile ist jetzt $(1, 0, \ldots, 0)$ und wir können die Determinante nach der ersten Zeile entwickeln. Wir können dann den Faktor $x_i - x_1$ aus der Zeile Z_i herausziehen, woher wir $\det(V_n(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n) \det(V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n))$ bekommen.