Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 8
Charakteristisches Polynom

Abgabe: 19.06.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 8.1 **(4 Punkte)**
Seien $A \in K^{r \times r}, B \in K^{r \times s}$ und $C \in K^{s \times s}$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(A)$

(b) Zeigen Sie, dass $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C) \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$

(c) Zeigen Sie, dass $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$.

(d) Folgern Sie, dass $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$.

Lösung:

(a) n-malige entwickelung nach der letzten Spalte liefert $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det(A)$. Formaler können wir dies per Induktion nach n beweisen:

- Für $n = 1$ entwickeln wir $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nach der letzten Spalte und bekommen $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det(A) = \det(A)$.
- Für beliebiges n, angenommen die Aussage gilt bis $n-1$, wir entwickeln wieder nach der letzten Spalte

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \overset{I.V.}{=} 1 \cdot \det(A) = \det(A).$$

(b) Bemerke dass $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ und wende (a) an.

(c) wir können B mit Zeilenoperationen entfernen:

Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$, $(b_{i,1}, \ldots, b_{i,s})$ die i-te Zeile von B.

Wir machen $Z_i \to Z_i - b_{i,1} Z_{r+1} - b_{i,2} Z_{r+2} - \cdots - b_{i,s} Z_{r+s}$. Dabei verschwindet die i-te Zeile von B und bleibt A ungeändert. Wir tun das für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$, woraus die Behauptung folgt.

Alternativ können wir wieder einen Induktionsbeweis führen, ohne Zeilenoperationen zu benutzen:

- Für $s = 1$ ist $B \in K^{r \times 1}$ ein Spaltenvektor. Wir entwickeln also nach der letzten Zeile:
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det(A) = \det(A)$$
- Für beliebiges s, angenommen die Aussage gilt bis $s - 1$, wir entwickeln nochmal nach der letzten Zeile:
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} A & B' \\ 0 & I_{s-1} \end{pmatrix} \overset{I.V.}{=} 1 \cdot \det(A) = \det(A)$$
wobei B' erhalten wir von B in dem wir die letzte Spalte ausstreichen.

(d) Es gilt dann $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} \det(C) = \det(A) \det(C)$.

Aufgabe 8.2 **(4 Punkte)**

Sei
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über jedem der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ berechnen Sie:

(i) das charakteristische Polynom von A und die Eigenwerte von A;

(ii) das Minimalpolynom von A;

(iii) die Eigenräume von A;

(iv) die Eigenvektoren von A.

Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$?

Lösung: Rechnen des charakteristischen Polynoms liefert $\chi(X) = (X^2 - 5)(X^2 + 1)$. Die Eigenwerte sind also $i, -i, \sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$. A ist also nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$ noch $\mathbb{R}$ weil $i \notin \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu $\sqrt{5}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ zu $-\sqrt{5}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \\ -i \end{pmatrix}$ zu i und

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \\ i \end{pmatrix}$ zu $-i$. Jeder Eigenraum hat Dimension 1, also ist Summe der Dimensionen aller Eingenräumen gleich 4, also ist A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 8.3 **(4 Punkte)**

Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

(a) In dieser Teilaufgabe beweisen Sie Bemerkung 14.5(1). Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in K[x]$,

$$[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$$

gilt.

(b) In dieser Teilaufgabe wird der Beweis von Satz 14.6 ergänzt. Sei p das Minimalpolynom von T. Seien ferner $\alpha \in V \setminus \{0\}$ und $c \in K$ mit $T(\alpha) = c\alpha$. Zeigen Sie, dass

$$p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$$

gilt.

(c) Sei W ein T-invarianter Unterraum von V. Zeigen Sie, dass W $f(T)$-invariant ist, für alle $f \in K[x]$.

Lösung:

(a) Aus der B1 (Satz 20.7) wissen wir, dass die Darstellungsmatrix der Verknüpfung zweier Operatoren ist das Produkt der Darstellungsmatrizen. Es folgt, dass $[T]_{\mathcal{B}}^m$ die Darstellungsmatrix in der Basis $\mathcal{B}$ von T^m ist, für alle $m \in \mathbb{N}$. Sei nun $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Dann ist $f([T]_{\mathcal{B}}) = a_0 I + a_1 [T]_{\mathcal{B}} + \ldots + a_n [T]_{\mathcal{B}}^n$. Es folgt, dass die j-te Spalte von $f([T]_{\mathcal{B}})$, die Darstellung von $a_0 b_j + a_1 T(b_j) + \ldots + a_n T^n(b_j)$ in der Basis $\mathcal{B}$ ist. Aber dies ist genau die Darstellung von $f(T)(b_j)$ in der Basis $\mathcal{B}$, also genau die j-te Spalte von $[f(T)]_{\mathcal{B}}$.

(b) Wir zeigen schnell per Induktion, dass $T^n(\alpha) = c^n \alpha$, für alle $n \in \mathbb{N}$ (nicht benötigt).

- $T^0(\alpha) = \mathrm{id}(\alpha) = \alpha = 1 \cdot \alpha = c^0 \alpha$.
- Angenommen bis $n-1$. Dann $T^n(\alpha) = T(T^{n-1}(\alpha)) = T(c^{n-1}\alpha) = c^{n-1}T(\alpha) = c^{n-1}c\alpha = c^n\alpha$.

Sein nun $p = p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(T(\alpha)) &= p_0 \,\mathrm{id}(\alpha) + p_1 T(\alpha) + \ldots + p_m T^n(\alpha) \\ &= p_0 \alpha + p_1 c \alpha + \ldots + p_n c^n \alpha \\ &= \alpha(p_0 + p_1 c + \ldots + p_n c^n) \\ &= \alpha p(c). \end{aligned}$$

(c) Seien $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ und $w \in W$. Dann ist

$$f(T)(w) = a_0 w + a_1 T(w) + \ldots + a_n T^n(w)$$

Da W T-invariant ist, es folgt, dass $T(w) \in W$, und daher $T(T(w)) \in W$ und $T^m(w) \in W$ für alle $m \in \mathbb{N}$. $f(T)(w)$ ist also Linearkombination von Elementen aus W und gehört zu W.

Zusatzaufgabe für Interessierte
Diese Aufgabe ist freiwillig und wird nicht korrigiert. Eine Musterlösung wird veröffentlicht.

Seien $A, B, C, D \in K^{n\times n}$.

(a) Wir nehmen an, dass D invertierbar ist und mit C kommutiert. Zeigen Sie, dass
$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(AD - BC)$ gilt.

(b) Gilt diese Formel auch wenn D nicht invertierbar ist?

(c) Gilt diese Formel auch wenn C und D nicht kommutieren?

Lösung:

(a) Wir nehmen an, dass D invertierbar ist und mit C kommutiert. Wir schreiben
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & A.0 + BD^{-1} \\ CD - DC & C.0 + DD^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$
Nach Aufgabe 1 gilt $\det\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = 1$ und $\det\begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$.
Falls A invertierbar ist und mit C kommutiert schreiben wir
$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ C & -A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & CB - AD \end{pmatrix}$$
also $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$.

(b) Sei $M(X) = \begin{pmatrix} A - XI_n & B \\ C & D - XI_n \end{pmatrix} \in K(X)^{2n\times 2n}$.
$\det(D - XI_n)$ ist das charakteristische Polynom von D also ist es insbesondere nicht null. $D - XI_n$ ist also invertierbar in $K(X)^{n\times n}$. Zudem kommutiert C mit $D - XI_n$, also können wir (a) über dem Körper $K(X)$ anwenden:
$\det(M(X)) = \det((A - XI_n)(D - XI_n) - BC)$. Mit $X = 0$ gilt dann
$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

(c) Gegenbeispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hier ist D invertierbar, kommutiert aber nicht mit C. Es gilt $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$ und $\det(AD - BC) = 1$.