Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 9

Abgabe: 26.06.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 9.1 **(4 Punkte)**

(a) Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $\mathcal{K}$ die Algebra der Polynomen in T. Sei $C \in Mat_{m\times m}(K[x])$, also $\det(C) \in K[x]$. Nun sei $B := C(T) \in Mat_{m\times m}(\mathcal{K})$ die Matrix die man aus C erhaltet wenn man jeden Eintrag von C in T evaluiert, d.h. $B_{ij} := C_{ij}(T)$, für alle i, j.

Zeigen Sie, dass $(\det(C))(T) = \det(B)$ gilt.

(b) Sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$ und sei $p = \text{CharPol(A)}$. Der Satz von Cayley-Hamilton sagt, dass $p(A) = 0$ gilt. Ist folgender Beweis richtig?

Aus $p(x) = \det(xI - A)$ *folgt* $p(A) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Man kann direkt die zwei mit der Definition der Determinante vergleichen. Wir schreiben die Einträge von C als $C_{ij}(x)$ und bekommen $\det(C) = \sum_{\sigma\in S_m} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^m C_{i\sigma(i)}(x)$. Das ist ein Polynom in x, also wenn wir T substituieren erhalten wir $\det(C)(T) = \sum_{\sigma\in S_m} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^m C_{i\sigma(i)}(T)$. Wenn wir nun $\det(B)$ berechnen, auch mit der Definition, wir finden direkt $\det(B) = \sum_{\sigma\in S_m} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^m C_{i\sigma(i)}(T)$. Also die zwei Determinanten sind gleich.

(b) Die Gleichung

$$p(A) = \det(A - A)$$

hat keinen Sinn, da sie eine Gleichung zweier Fremdartige Objekte ist: $p(A)$ ist eine $n\times n$-Matrix wobei $\det(A - A) \in K$.

Aufgabe 9.2 **(4 Punkte)**

In dieser Aufgabe ergänzen Sie den Beweis von Lemma 17.1(2).
Seien K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Unterraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von W. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ Vektoren aus V so dass, $\{\bar\alpha_1, \dots, \bar\alpha_r\}$ eine Basis von V/W ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ eine Basis von V ist.

Lösung: Sei $n = \dim V$ und sei $A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Dann gilt $A \cap \mathcal{B} = \emptyset$, weil für Elemente $b \in \mathcal{B}$ gilt $\bar b = 0$ also sie dürfen keine Basiselemente für V/W sein. Und ein Element $a \in A$

darf nicht zu W gehören, sonst wäre $\bar{a} = 0$ und, nochmal, dieser darf kein Basiselement für V/W sein.
Aus der Beziehung $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$ folgt $|\mathcal{B}| = n-r$. Schreibe $\mathcal{B} = \{\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n\}$. Damit $|\mathcal{B} \cup A| = n = \dim V$. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathcal{B} \cap A$ linear unabhängig ist. Seien $c_1, \ldots, c_n \in K$ mit

$$c_1\alpha_1 + \ldots + c_r\alpha_r + c_{r+1}\beta_{r+1} + \ldots + c_n\beta_n = 0 \tag{1}$$

Es folgt

$$c_1\bar{\alpha}_1 + \ldots + c_r\bar{\alpha}_r + c_{r+1}\bar{\beta}_{r+1} + \ldots + c_n\bar{\beta}_n = c_1\bar{\alpha}_1 + \ldots + c_r\bar{\alpha}_r = 0$$

(weil $\beta_i \in W$) und daher $c_1 = \ldots = c_r = 0$ weil die $\bar{\alpha}_i$ eine Basis bilden. Dann die Gleichung (1) wird

$$c_{r+1}\beta_{r+1} + \ldots + c_n\beta_n = 0$$

woraus $c_{r+1} = \ldots = c_n = 0$ folgt, weil $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.

Erinnerung: Das *kleinste gemeinsame Vielfache* von $p, q \in K[x]$ ist ein Polynom $kgV(p, q) \in K[x]$, so dass:

- p und q teilen $kgV(p, q)$.
- Falls $p \mid f$ und $q \mid f$, gilt auch $kgV(p, q) \mid f$ für alle $f \in K[x]$.

Aufgabe 9.3 **(4 Punkte)**
Diese Aufgabe verallgemeinert Korollar 17.3.
Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $T : V \to V$ linear sowie $U_1, U_2 \subseteq V$ T-invariante Unterräume mit $U_1 + U_2 = V$. Für $i \in \{1, 2\}$ sei μ_i das Minimalpolynom von $T|_{U_i} : U_i \to U_i$. Ferner sei μ das Minimalpolynom von T. Zeigen Sie: $\mu = \mathrm{kgV}(\mu_1, \mu_2)$.

Lösung: Sei $f := kgV(\mu_1, \mu_2)$. Es gilt $\mu(T_{|U_i}) = 0$ also $\mu_i \mid \mu$ also $f \mid \mu$. Schreibe $f = g_i\mu_i$. Es gilt $f(T) = g_i(T) \circ \mu_i(T)$. Sei $v \in V$, schreibe $v = u_1 + u_2$ mit $u_i \in U_i$, dann ist $f(T)(v) = f(T)(u_1) + f(T)(u_2) = g_1(T)(u_1)\mu_1(T)(u_1) + g_2(T)(u_2)\mu_2(T)(u_2) = 0 + 0 = 0$ also $\mu \mid f$.

Zusatzaufgabe für Interessierte
Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 7.1(b).

(a) Sei $A[x] \in Mat_{n\times n}(K[x])$. Also $A[x]$ ist eine $n \times n$-Matrix wo die Einträge Polynomen aus $K[x]$ sind. Für $c \in K$ bezeichnet $A(c)$ die Matrix aus $Mat_{n\times n}(K)$ die man aus $A[x]$ enthält in dem man in allen Einträgen von $A[x]$, $x = c$ ersetzt. Sei $r := rang(A(0))$.

Zeigen Sie, dass $x^{n-r} \mid \det(A[x])$.

Hinweis: Betrachten Sie die reduzierte Zeilenstufenform von $A(0)$.

(b) Wie folgert man die Behauptung von 7.1(b) daraus?

Lösung:

(a) Es gibt

$$P, Q \text{ ivertierbar so dass } PA(0)Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (Blockmatrix)}$$

Die letzte $n - r$ Zeilen von $PAQ[X]$ bestehen also aus Polynomen, die von X geteilt werden.

Es gilt also $X^{n-r} \mid \det(PAQ[X]) = \det(P)\det(Q)\det(A[X])$.

(b) Sei A wie in Aufgabe 7.1(b). Wir ersetzen -1 durch $1 - X$. Dann gilt $r = 1$ also nach (a) $X^{n-1} \mid \det(A[X])$. Wir nehmen dann $X = 2$.