Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Lösung zu Blatt 10

Abgabe: 03.07.2020, an Ihren Tutor.

1	2	3	Σ

Aufgabe 10.1 **(5 Punkte)**

In dieser Aufgabe beweisen Sie Lemma 18.1 und Bemerkung 19.1.
Seien V ein K-Vektorraum und $W_1, ..., W_k$ Unterräume von V. Sei $W := W_1 + ... + W_k$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $W_1, ..., W_k$ sind unabhängig, d.h. falls $\alpha_1 + ... + \alpha_k = 0$ mit $\alpha_i \in W_i$ für $0 < i \leq k$, so ist $\alpha_i = 0$ für $0 < i \leq k$.

(ii) Für jedes j mit $2 \leq j \leq k$ gilt

$$W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1}) = \{0\}.$$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis für W_i $(0 < i \leq k)$, so ist $(\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k)$ eine angeordnete Basis für W.

(iv) Sei nun $U \subseteq V$ ein Unterraum und sei $X := \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ eine linear unabhängige Menge mit $\operatorname{span}(X) \cap U = \{0\}$. Zeigen Sie, dass X zu einer Basis eines Komplements von U ergänzt werden kann.

(v) Zeigen Sie, dass das Komplement eines Unterraums im allgemeinen nicht eindeutig ist.

Lösung: Offensichtlich ist die Äquivalenz der ersten drei gemeint.
(**i**) $\Rightarrow$ (**ii**): Sei $j \geq 2$ und sei $v \in W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1})$. Dann $v \in W_j$ und existieren $v_1, \ldots, v_{j-1}$ mit $v_i \in W_i$ und $v = v_1 + \ldots + v_{j-1}$. Dies impliziert $v_1 + \ldots + v_{j-1} - v = 0$ und $v \in W_j$. (i) ergibt also $v_1 = \ldots v_{j-1} = v = 0$. Dass $0 \in W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1})$ gilt folgt aus der Tatsache dass der Schnitt zweier Vektorräume wieder ein Vektorraum ist.

(**i**) $\Leftarrow$ (**ii**): Seien $v_1 \in W_1, \ldots, v_k \in V_k$ mit $v_1 + \ldots + v_k = 0$. Dann $-v_k = v_1 + \ldots + v_{k-1}$ also $-v_k \in W_k \cap (W_1 + \ldots + W_{k-1}) = \{0\}$ und somit $-v_k = 0 \Rightarrow v_k = 0$. Es folgt $v_1 + \ldots + v_{k-1} = 0$, also $-v_{k-1} = v_1 + \ldots + v_{k-2}$. Wir wiederholen das Argument k Mal und finden $v_1 = \ldots = v_n = 0$, wie gewollt.

(**i**) $\Rightarrow$ (**iii**): Schreibe $\mathcal{B}_i = \{b_1^i, \ldots, b_{m_i}^i\}$ und sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$. Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ erzeugend ist. Sei $w \in W$. Da $W = W_1 + \ldots + W_k$ existieren $w_1 \in W_1, \ldots, w_k \in W_k$ mit $w = w_1 + \ldots + w_k$. Nun, für jedes $i = 1, \ldots, k$ existieren $c_1^i, \ldots, c_{m_i}^i \in K$ mit $w_i = c_1^i b_1^i + \ldots + c_{m_i}^i b_{m_i}^i$. Daraus folgt

$$w = \sum_{i=1}^{k} w_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m_i} c_j^i b_j^i \right).$$

Nun zeigen wir, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist. Seien, $c_1^i, \ldots, c_{m_i}^i \in K$, für alle $i = 1, \ldots, k$, mit $\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{m_i} c_j^i b_j^i \right) = 0$. Schreibe $w_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_j^i b_j^i \in W_i$. Dann, aus $\sum_{i=1}^k w_i = 0$ folgt, mit (i), dass $w_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Dann, für alle i, da $\mathcal{B}_i$ eine Basis ist und also linear unabhängig, folgt $c_j^i = 0$ für alle $j = 1, \ldots, m_i$. Und das zeigt die linear Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)**: Seien $w_1 \in W_1, \ldots, w_k \in W_k$ mit $w_1 + \ldots + w_k = 0$. Für alle $i = 1, \ldots, k$ existieren $c_1^i, \ldots, c_{m_i}^i \in K$ mit $w_i = c_1^i b_1^i + \ldots + c_{m_i}^i b_{m_i}^i$. Also

$$\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{m_i} c_j^i b_j^i \right) = 0$$

Aber $\mathcal{B}$ ist eine Basis, also eine solche Linearkombination kann nur 0 sein wenn alle die Koeffizienten null sind: für alle $i = 1, \ldots, k$ und alle $j = 1, \ldots, m_i$ ist $c_j^i = 0$, und somit ist $w_i = 0$ für alle i. Das zeigt (i).

(iv) Sei $B_U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von U. Da $\mathit{span}(X) \cap U = \{0\}$ gilt, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k\}$ linear unabhängig. Ergänze zu einer Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m\}$ von V. Dann ist $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ linear unabhängig und es gilt $U \oplus \mathit{span}\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$.

(v) $\mathit{span}\{(0,1)\}$ und $\mathit{span}\{(1,1)\}$ sind beide Komplemente zu $\mathit{span}\{(1,0)\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 10.2 **(3 Punkte)**

In dieser Aufgabe wird Lemma 18.6 bewiesen.
Seien $T : V \to V$ linear, $c \in K$ ein Eigenwert von T, $v_1, ..., v_r \in V$ mit $v_1 \neq 0$ so, dass

$$(T - cI)(v_1) = 0$$

und

$$(T - cI)(v_i) = v_{i-1}$$

für $i = 2, ..., r$, d.h. so, dass $(v_1, ..., v_r)$ eine Jordan Kette der Länge r zum Eigenwert c ist.
Zeigen Sie für $W := \operatorname{Span}\{v_1, ..., v_r\}$:

(i) $\mathcal{B}' := \{v_1, ..., v_r\}$ ist eine Basis für W.

(ii) W ist T-invariant.

(iii)

$$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & c & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & c \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(i) Wir müssen nur zeigen, dass $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linear unabhängig ist. Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit

$$a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r = 0 \tag{1}$$

Wir wenden $(T - cI)^{r-1}$ auf beide Seiten der Gleichung an, und finden

$$a_1(T - cI)^{r-1}(v_1) + a_2(T - cI)^{r-1}(v_2) + \ldots + a_r(T - cI)^{r-1}(v_r) = 0$$

Der erste Summand verschwindet bei der ersten Anwendung von $T - cI$, der zweite nach der zweiten usw. Es überlebt also nur

$$a_r(T - cI)^{r-1}(v_r) = a_r v_1 = 0$$

was, mit $v_1 \neq 0$, impliziert $a_r = 0$. Die Gleichung (1) wird dann

$$a_1 v_1 + \ldots + a_{r-1} v_r - 1 = 0$$

Mit Anwendung von $(T - cI)^{r-2}$ finden wir jetzt $a_{r-2} v_1 = 0$ und somit $r - 2 = 0$. Wenn wir das gleiche Verfahren noch $r - 3$ Mal wiederholen finden wir $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$, wie gewollt.

(ii) Nach Annahme gilt, für alle $i = 2, \ldots, r$, $T(v_i) = v_{i-1} + cv_i$. Sei nun $w \in W$, also $w = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i$ für gewisse $a_i \in K$. Dann

$$T(w) = \sum_{i=1}^{r} a_i T(v_i) = a_1 c v_1 + \sum_{i=2}^{r} a(v_{i-1} + cv_i)$$

also $T(w)$ ist eine Linearkombination der v_i und somit $T(w) \in W$.

(iii) Als wir bereits bemerkt haben, es gilt

$$T(v_1) = cv_1 \quad \text{ und } T(v_i) = v_{i-1} + cv_i \text{ für } i \geq 2.$$

Die Spalten von $[T_W]_{\mathcal{B}'}$ sind, nach Definition, die Bilder der Elemente $v_1, \ldots, v_r$ in der angeordneten Basis $\{v_1, \ldots, v_r\}$, also genau

$$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & c & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.3 **(4 Punkte)**

In dieser Aufgabe beweisen Sie Bemerkung 19.5.

Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $W_1, ..., W_k$ Unterräume von V. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Angenommen $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ und für alle $0 < i \leq k$ ist W_i T-invariant. Sei für jedes $0 < i \leq k$ $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis für W_i und $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k)$. Zeigen Sie, dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T|_{W_k}]_{\mathcal{B}_k} \end{pmatrix}$$

ist.

Lösung: Da $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Schreibe $\mathcal{B}_1 = \{b_1^1, \ldots, b_{m_1}^1\}, \ldots, \mathcal{B}_k = \{b_1^k, \ldots, b_{m_k}^k\}$. Dann

$$b_j^i = 0b_1^1 + \ldots + 0b_{m_1}^1 + \ldots + 0b_1^i \ldots + 1b_j^i + \ldots + b_{m_i}^i + \ldots + 0b_1^k + \ldots + 0b_{m_k}^k$$

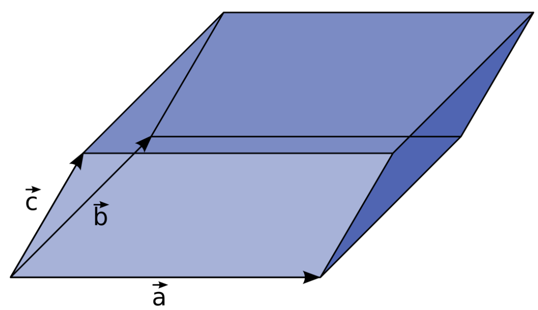
in der Basis $\mathcal{B}$. Dann

$$T(b_j^i) = T_{W_1}(0b_1^1 + \ldots + 0b_{m_1}^1) + \ldots + T_{W_i}(0b_1^i \ldots + 1b_j^i + \ldots + b_{m_i}^i) + \ldots + T_{W_k}(0b_1^k + \ldots + 0b_{m_k}^k)$$

d.h., $([T]_{\mathcal{B}})_{ij} = T_{W_i}(b_j^i) = ([T_{W_i}]_{\mathcal{B}_i})_{ij}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte
Seien $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Sei P das erzeugte Parallelepiped (wie im Bild) und sei V sein Volumen. Zeigen Sie:

$$V = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$



Lösung: Sei A die Matrix von oben. Die Determinante ändert sich nicht, wenn wir zu einer Zeile ein Vielfach einer anderen Zeilen addieren. Insbesondere, wenn wir Z_1 mit $Z_1 - \frac{a_3}{c_3} Z_3$ und Z_2 mit $Z_2 - \frac{b_3}{c_3} Z_3$ und danach (die neue) Z_1 mit (der neuen) $Z_1 - \frac{a_2}{b_2} Z_2$ ersetzen, bekommen wir eine untere Dreiecksmatrix mit der gleichen Determinante. Das Parallelepiped wurde nur gedreht, damit der Vektor $\mathbf{a}$ auf der x-Achse liegt und der Vektor $\mathbf{b}$ auf der xy-Ebene. Das Volumen ist dasselbe geblieben. Wir können also annehmen, dass $\mathbf{a} = (a_1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ und somit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt der Basis ist also die Länge von $\mathbf{a}$ mal die Höhe (das y-Komponent von $\mathbf{b}$). Also der Flächeninhalt der Basis ist $a_1 b_2$. Das Volumen ist nun der Flächeninhalt mal die Höhe (das z-Komponent) von $\mathbf{c}$. Das ergibt $V = a_1 b_2 c_3 = \det A$.