Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Lösung zu Blatt 11

Aufgabe 11.1 **(3 Punkte)**

(a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Finden Sie $P \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ so dass $P^{-1}AP$ in Jordan Normalform ist und geben Sie die Jordan Normalform von A an.

(b) Berechnen Sie die Jordan Normalform der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{6\times 6}(\mathbb{R})$$

Lösung:

(a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $Char.Pol(A) = (X-2)(X+1)^2$, die Eigenwerte sind 2 und -1. $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu 2. Wir wollen jetzt einen Vektor in $Ker(A+1)^2 \backslash Ker(A+1)$ finden. Es gilt $A+1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $(A+1)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \\ -18 & 0 & 18 \end{pmatrix}$. Wir sehen, dass $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker(A+1)^2 \backslash Ker(A+1)$. Es muss dann $v_2 := (A+1)v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker(A+1)$ gelten.

Wir definieren P als die Basiswechselmatrix von der kanonischen Basis nach (v_1, v_2, v_3), also $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und es gilt $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a') Hier ist eine zweite Variante zu Teilaufgabe (a), für die wir uns bei Dr. D.K. Huynh bedanken. Dies Zeigt, unter anderen, dass die JNF nicht im allgemeinen eindeutig bestimmt ist. Es wird eindeutig bestimmt wenn wir, z.B., eine Anordnung der Eigenwerten die auf der Diagonale erscheinen wählen: $c_1 < c_2 < \ldots$.

Zu bestimmen ist die Jordan Normalform der folgenden (3×3)-Matrix mit reelwertigen Einträgen

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom von A via

$$f(x) = \det(xI - A) = -x^3 + 3x + 2 = -(x+1)^2(x-2).$$

Aus der Linearfaktorzerlegung können wir sofort ablesen, dass $c_1 = -1$ und $c_2 = 2$ Eigenwerte von A sind. Die Vielfachheit der Nullstelle ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes. Es bezeichne r_i die algebraische Vielfachheit von c_i mit $i = 1, 2$. Dann gilt $r_1 = 2$ und $r_2 = 1$.

Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert c. Diese entspricht der Anzahl der Jordan-Blöcke. Wir bestimmen daher nun die Eigenräume zu c_1 und c_2.

Der Eigenraum zum Eigenwert c ist (definitionsgemäß) der Kern von $(A - cI)$. Es gilt

$$A - c_1 I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösen des homogenen LGS

$$(A - c_1 I)x = 0$$

liefert

$$\mathrm{Eig}(A, c_1 = -1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Also gilt $\dim(A, c_1 = -1) = 1$, mithin gibt es 1 Jordan-Block zum Eigenwert $c_1 = -1$. Da die algebraische Vielfachheit von c_1 gleich 2 ist, wissen wir auch, dass dieser Jordan-Block eine (2×2)-Matrix ist. Mithin muss der Eigenraum von c_2 die Dimension 1 haben und ein (1×1)-Jordan-Block sein. An dieser Stelle wissen wir bereits, dass die Jordan Normalform von A wie folgt aussieht

$$\mathrm{JNF}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei die rot unterlegten Zahlen zum Jordan-Block von c_1 gehören und die magenta unterlegte Zahl zum Jordan-Block von c_2 gehört. Um eine Transformationsmatrix P mit

$$\mathrm{JNF}(A) = P^{-1}AP$$

anzugeben, bestimmen wir nun jeweils Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ der Haupträume von c_1 und c_2. Die Spalten von P sind die Basen der Haupträume in der Reihenfolge der dazugehörigen Jordan-Blöcke. Die Haupträume sind definiert als

$$\mathrm{Hau}(A, c_1) = \ker((A - c_1 I)^{r_1}) \text{ bzw. } \mathrm{Hau}(A, c_2) = \ker((A - c_2 I)^{r_2}),$$

wobei r_1 bzw. r_2 die algebraische Vielfachheit von c_1 bzw. c_2 bezeichnet.
Nun gilt

$$(A - c_1 I)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \\ 18 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

und weiter (durch das Lösen eines homogenen LGS)

$$\mathrm{Hau}(A, c_1) = \ker \begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \\ 18 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wegen $r_2 = 1$ gilt

$$\mathrm{Hau}(A, c_2) = \mathrm{Eig}(A, c_2) = \ker(A - c_2 I).$$

Wir erhalten

$$A - c_2 I = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und weiter (erneut durch das Lösen eines homogenen LGS):

$$\ker(A - c_2 I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Damit erhalten wir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und Invertieren liefert

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe rechnen wir $P^{-1}AP$ aus und erhalten in der Tat

$$\mathrm{JNF}(A) = P^{-1}AP.$$

(b) Sei A die Matrix. 2 ist der einzige Eigenwert von A. Wir untersuchen jetzt $Ker(A - 2I_6)^n$ für $1 \leq n \leq 6$. Es gilt $A - 2I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A-2I_6)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } (A-2I_6)^3 = 0.$$

Also $\dim Ker(A-2I) = 3$, $\dim Ker(A-2I)^2 = 5$, $\dim Ker(A-2I)^3 = 6$. Nehme $\alpha_1 \notin Ker(A-2I)^2$ und definiere $\alpha_2 := (A-2I)\alpha_1 \in Ker(A-2I)^2$. Wir ergänzen α_2 zu einer Basis $\{\alpha_2, \beta_1\}$ eines Komplements von $Ker(A-2I)$ in $Ker(A-2I)^2$ (dieses Komplement hat Dimension $2 = \dim Ker(A-2I)^2 - \dim Ker(A-2I)$). Wir definieren jetzt $\alpha_3 := (A-2I)\alpha_2$ und $\beta_2 = (A-2I)\beta_1$. Wir ergänzen $\{\alpha_3, \beta_2\}$ zu einer Basis $\{\alpha_3, \beta_2, \gamma_1\}$ von $Ker(A-2I)$. Wir haben also eine Jordankette der Länge 3: $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha_3$, eine der Länge 2:$\beta_1 \to \beta_2$ und eine der Länge 1: γ_1. Die gesuchte Matrix ist also:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11.2 **(5 Punkte)**

Beweisen Sie Folgerungen 21.10 I. bis IV. und die Eigenschaften (1) bis (4) der transponierten Konjugierte danach.

Lösung:

I. $(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$ definiert ein inneres Produkt auf V^*.

   Beweis:

   i. $(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1)) = \overline{(\rho(f_1) \mid \rho(f_2))} = \overline{(f_2 \mid f_1)}$

   ii. $(cf + dg|h) = (c\rho(f) d\rho(g)|\rho(h)) = c(\rho(f)|\rho(h)) + d(\rho(g)|\rho(h)) = c(f|h) + d(g|h)$ für alle $c, d \in K$ und $f, g, h \in V^*$.

   iii. $(\rho(f)|\rho(f)) \geq 0$ und $(\rho(f)|\rho(f)) = 0 \iff \rho(f) = 0 \iff f = 0$.

II. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis für V, dann existiert $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis für V mit $(x_i \mid y_i) = \delta_{ij}$ für alle i, j.

   Beweis: Für $i = 1, \ldots, n$ sei $W_i = span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^\perp$. Wähle $z_1 \in W_i$ und $z_i \in W_i \setminus span(z_1, \ldots, z_{i-1})$ für $i > 1$. Setze $y_i = \frac{1}{(z_i|y_i)} z_i$. Es ist jetzt einfach zu überprüfen dass $\{y_1, \ldots, y_n\}$ die verlangte Eigenschaften hat.

III. $W^0 \subseteq W^*$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$, i.e. $\rho(W^0) = W^\perp$.

   Beweis: Die Inklusion $\rho(W^0) \supseteq W^\perp$ ist bekannt (sei $v \in W^\perp$ und setze $f \in V^* : f(x) = (v|x)$. Dann gilt $f(w) = (w|v) = 0$ für alle $w \in W$, also $f \in W^0$ und $\rho(f) = v$). Umgekehrt, sei $f \in W^0$ und sei $v = \rho(f)$. Weiter, sei $w \in W$. Dann $(v|w) = (\rho(f)|w) = f(w) = 0$ weil $f \in W^0$.

IV. Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Definiere T^* durch $(Tx \mid y) := (x \mid T^*y)$ für alle $x \in V$ (d.h. $T^*(y) = z$, genau dann, wenn für alle $x \in V : (x \mid z) = (Tx \mid y)$). Es gilt $T^* \in \mathcal{L}(V,V)$. T^* ist die transponierte (adjungierte) Konjugierte.

Eigenschaft der tranponierten Konjugierten

(1) $(cT)^* = \bar{c}T^*$

(2) Sei $[T]_{\mathcal{X}} := A$ und $\mathcal{Y}$ die Basis wie in II. Es gilt $[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} := A^*$ (i.e. der ij-te Koeffizient von A^* ist $\overline{a_{ji}}$, wobei a_{ij} der ij-te Koeefizient von A ist).

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A.

Beweis:

(1) $(cTx \mid y) = c(x \mid T^*y) = (x \mid \bar{c}T^*y)$.

(2) Sei $B := [T^*]_{\mathcal{Y}}$. Es gilt ¨ $(T^*y_j \mid x_i) = (\sum_{k=1}^n B_{kj}y_k \mid x_i) = B_{ij}$ (weil $(y_k \mid x_i) = \delta_{ik}$), aber auch $(T^*y_j \mid x_i) = (y_j \mid Tx_i) = (y_j \mid \sum_{k=1}^n A_{ki}x_k) = \bar{A}_{ji}$, also $B_{ij} = \bar{A}_{ji}$.

(3) Folgt direkt aus (2).

(4) Folgt aus $Char.Pol(\bar{A}^t) = \overline{Char.Pol(A)}$.

Aufgabe 11.3 **(4 Punkte)**

(a) Sei $(\mid)$ das innere Standardprodukt auf $\mathbb{R}^4$, und seien $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,4,5)$, $v_3 = (1,-3,-4,-2)$. Finden Sie eine Orthonormalbasis (bezüglich $(\mid)$) von $W := \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens.

(b) Sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine vollständige orthonormale Menge in einem inneren Produktraum und sei $y_i = \sum_{j=1}^i x_j$. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf $y_1, ..., y_n$ an und erhalten neue Elemente $z_1, ..., z_n$. Drücken sie $z_1, ..., z_n$ als Linearkombination der x_i aus.

Lösung:

(a) Es gilt $||v_1|| = 2$ also $w_1 := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$\hat{w}_2 := v_2 - (v_2 \mid w_1)w_1 = (-2,-1,1,2)$,

$||\hat{w}_2|| = \sqrt{10}$ also $w_2 := (\frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$

$\hat{w}_3 := v_3 - (v_3 \mid w_2)w_2 - (v_3 \mid w_1)w_1 = (\frac{16}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-13}{10}, \frac{14}{10})$

$||\hat{w}_3|| = \frac{\sqrt{910}}{10}$ also

$w_3 = (\frac{16}{\sqrt{910}}, \frac{-17}{\sqrt{910}}, \frac{-13}{\sqrt{910}}, \frac{14}{\sqrt{910}})$

(b) Durch Induktion auf n lässt sich leicht zeigen, dass $z_i = x_i$ für alle i. In der Tat, aus $y_1 = x_1$ folgt $z_1 = \frac{x_1}{||x_1||} = x_1$ (da die x_i orthonormal sind). Sei nun $1 < k \leq n$ und wir nehmen an, dass $x_i = z_i$ für $i \leq k-1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
z_k &= y_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(y_k|z_j)}{||z_j||} z_j \\
&= y_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(y_k|x_j)}{||x_j||} x_j \\
&= y_k - \sum_{j=1}^{k-1} (y_k|x_j) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=1}^{k-1} (y_k|x_j) x_j \\
&= x_k - \sum_{j=1}^{k-1} [1 - (y_k|x_j)] x_j \\
&= x_k - \sum_{j=1}^{k-1} [1 - (\sum_{i=1}^{k} x_i|x_j)] x_j \\
&= x_k - \sum_{j=1}^{k-1} [1 - \sum_{i=1}^{k} (x_i|x_j)] x_j \\
&= x_k - \sum_{j=1}^{k-1} [1 - \sum_{i=1}^{k} \delta_{ij}] x_j \\
&= x_k - \sum_{j=1}^{k-1} [1 - 1] x_j \\
&= x_k
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe für Interessierte (dringend empfohlen für diejenigen, die die komplexen Zahlen noch nicht kennen):
In dieser Aufgabe führen wir den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ein, in dem wir ihn mit dem zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ identifizieren. In der B3 werden wir zeigen, dass $\mathbb{C}$ ein *algebreisch abgeschlossener Körper* ist, d.h., dass alle nichtkonstanten Polynome über $\mathbb{C}[x]$ in Linearfaktoren zerfallen.
Sei $\mathbb{C}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Wir versehen $\mathbb{C}$ mit einer Multiplikation $*$ definiert durch

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, +, *)$ ein Körper ist mit $(1, 0)$ als neutralem Element bezüglich $*$.

(b) Für $(a, b) \in \mathbb{C}$ heißt $(a, -b)$ *das komplex Konjugierte von* (a, b). Wir schreiben $\overline{(a, b)} := (a, -b)$. Zeigen Sie, dass für alle $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ gelten:

   (i) $\overline{(a, b) + (c, d)} = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)}$.

   (ii) $\overline{(a, b) * (c, d)} = \overline{(a, b)} * \overline{(c, d)}$.

   (iii) $((a, b)|\overline{(a, b)}) = ||(a, b)||^2$ bezüglich des üblichen inneren Produktes auf $\mathbb{R}^2$ (siehe Beispiel 20.3).

(c) Sei $i := (0,1), 1 := (1,0)$ und schreibe $a + ib := (a,b)$. Damit identifizieren wir den Teilkörper $\mathbb{R}$ von $\mathbb{C}$ mit der Menge der Elementen $(a,0)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass $i = \sqrt{-1}$ gilt.

(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) $(\mathbb{C}, +)$ ist eine Abelsche Gruppe, weil es ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Für die Multiplikation "$*$":

Assoziativität: $((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (ac - bd, ad + bc) * (e,f) = ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) = (ace - bde - adf + bcf, acf - bdf + ade + bce)(a(ce - df) - b(cf - de), a(cf + de) + b(ce - df)) = (a,b) * (ce - df, cf + de) = (a,b) * ((c,d) * (e,f))$;

Kommutativität: $(c,d) * (a,b) = (ca - db, cb + da) = (ac - db, ad + bc) = (a,b) * (c,d)$;

Neutrales Element: $(a,b) * (1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b)$

Inverse: sei $(a,b) \neq (0,0)$. Dann $a^2 + b^2 \neq 0$. Es gilt also $(a,b)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a,-b)$. In der Tat, $(a,b) * (a,-b) = (a^2 + b^2, 0)$.

Distributivgesetz: $(a,b)*((c,d)+(e,f)) = (a,b)*(c+e, d+f) = (a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)) = (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) = (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf, af+be) = (a,b) * (c,d) + (a,b) * (e,f)$.

(b) (i) $\overline{(a,b) + (c,d)} = \overline{(a+c, b+d)} = (a+c, -b-d) = (a,-b) + (c,-d) = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$.

(ii) $\overline{(a,b) * (c,d)} = \overline{(ac - bd, ad + bc)} = (ac - bd, -ad - bc) = (a,-b) * (c,-d) = \overline{(a,b)} * \overline{(c,d)}$.

(iii) $((a,b)|\overline{(a,b)}) = ((a,b)|(a,-b)) = a^2 + b^2 = ||(a,b)||^2$

(c) (i) $i^2 = (0,1) * (0,1) = (-1,0) = -1$

(ii) Sei $z = a + ib = (a,b)$, dann $\bar{z} = (a,-b)$. Dann $z = \bar{z} \iff b = -b \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.