Prof. Dr. S. Kuhlmann,
S. Müller,
M. Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Lösung zu Blatt 12
Hermite'sche Operatoren

Dieses Blatt muss nicht abgegeben werden. *Das Bearbeiten der folgenden Aufgaben ist freiwillig aber dringend empfohlen!*
Nächste Woche wird kein Übungsblatt ausgegeben, aber eine ***Probeklausur*** *(mit Lösungen) wird veröffentlicht.*

Aufgabe 12.1

(a) Sei $||x||_1 := |x_1| + |x_2|$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $||x||_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Sei $||x||_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $||x||_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung: In beiden Fällen zeigen Wir die drei Eigenschaften eine Norm erfüllen muss (Bemerkung 21.4).

(a) 1) $||x||_1 = 0 \iff |x_1| + |x_2| = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = (0,0) = 0.$

2) $||cx||_1 = |cx_1| + |cx_2| = |c|(|x_1| + |x_2|) = |c| \cdot ||x||_1$

3) $||x+y||_1 = ||(x_1+y_1, x_2+y_2)||_1 = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = ||x||_1 + ||y||_1$

(b) 1) $||x||_\infty = 0 \iff \max\{|x_1|, |x_2|\} = 0$ und da $|x_i| \geq 0$ dies ist äquivalent zu $|x_1| = |x_2| = 0 \iff x = 0$

2) $||cx||_\infty = \max\{|cx_1|, |cx_2|\} = \max\{|c||x_1|, |c||x_2|\} = |c| \max\{|x_1|, |x_2|\} = |c|||x||_\infty$

3) $||x+y||_\infty = \max\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|\} \leq \max\{|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|\} \leq \max\{|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|, |x_1| + |y_2|, |x_2| + |y_1|\} = ||x||_\infty + ||y||_\infty$

Aufgabe 12.2

Beweisen sie die Eigenschaften (i) bis (iv) eines Hermite'schen Opterators aus Bemerkung 22.3.
Lösung:

(i) Umgekehrt sei A Hermite'sch und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis für V mit $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definiere $T(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i) := A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$. Dann ist T Hermite'sch.

Beweis: Sei v beliebig und schreibe $v = v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n$ in der Basis $\mathcal{X}$. Dann gilt

$$Tv = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \bar{A}^T \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = [T^*]_{\mathcal{X}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = T^* v$$

und somit $T = T^*$.

(ii) T_1, T_2 sind Hermite'sch $\Rightarrow T_1 + T_2$ ist Hermite'sch.

Beweis: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$((T_1+T_2)x|y) = (T_1x+T_2x|y) = (T_1x|y)+(T_2x|y) = (x|T_1y)+(x|T_2y) = (x|T_1y+T_2y) = (x|(T_1+T_2)y)$$

(iii) $T \neq 0$ ist Hermite'sch, $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, dann ist αT Hermite'sch genau dann, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei αT Hermitse'sch. Dann, für alle $x \in V$ gilt $(\alpha Tx|x) = \alpha(Tx|x) \in \mathbb{R}$. Da $(Tx|x) \in \mathbb{R}$ gilt (weil T Hermite'sch ist) folgt $\alpha \in \mathbb{R}$.
Umgekehrt, sei $\alpha \in \mathbb{R}$, also $\bar{\alpha} = \alpha$. Dann, für alle $x, y \in V$ ist $(\alpha Tx|y) = (Tx|\bar{\alpha}y) = (Tx|\alpha y) = (x|\alpha Ty)$.

(iv) T ist invertierbar und Hermite'sch genau dann, wenn T^{-1} Hermite'sch ist.

Beweis: Sei $A = [T]_{\mathcal{X}}$ für eine Orthonormalbasis $\mathcal{X}$. Dann $(A^*)^-1 = (A)^{-1} = A^{-1}$ also T^{-1} ist auch Hermite'sch. Dies zeigt bereits die Äquivalenz!

Aufgabe 12.3

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen inneren Produkt. Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(V, V)$ genau dann eine Isometrie ist, wenn es ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Darstellungsmatrix von T in der kanonischen Basis entweder

$$A_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \text{ oder } B_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation für A_ϑ und B_ϑ und diagonalisieren Sie B_ϑ.

(b) Sei jetzt $V = \mathbb{R}^3$ und T eine Isometrie. Wir nehmen an, dass $\det(T) = 1$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Matrix.

Lösung:

(a) Weil T eine Isometrie ist, muss $\det(T) \in \{-1, 1\}$ gelten. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Darstellungsmatrix von T in der kanonischen Basis (e_1, e_2). Es gilt $ad - bc = 1$ oder -1. Weil T eine Isometrie ist, und weil die Basis orthonormal ist, muss auch $ab + cd = 0$ gelten.

Fall $\det(T) = 1$: dann ist $ab + cd = 0$ und $ad - bc = 1$. Falls $c = 0$, gilt dann $ab = 0$ und $ad = 1$, woraus $b = 0$ folgt, also ist M diagonal. Weil T eine Isometrie ist gilt aber $||Te_1|| = ||e_1|| = 1$, also muss $a = d = 1$ oder $a = d = -1$ gelten, also $M = A_0$ oder $M = A_\pi$. Wir nehmen jetzt an, dass $c \neq 0$. Es gilt dann $c = -\frac{ab}{d}$ und $ad + \frac{ab^2}{d} = 1$, also $a(b^2 + d^2) = d$. Es gilt aber $||Te_2|| = 1$, also $b^2 + d^2 = 1$, also $a = d$, woraus auch $c = -b$ folgt. $ad - bc = 1$ wird dann zu $a^2 + c^2 = 1$, also existiert ϑ mit $a = \cos(\vartheta)$ und $b = \sin(\vartheta)$. T ist dann die Drehung mit Winkel ϑ.

Falls $\det(T) = -1$: Der Beweis ist ähnlich, aber hier bekommen wir $ad = -1$ im Fall $c = 0$, also muss $a = 1 = -d$ oder $d = 1 = -a$ gelten, also $M = A_{\frac{\pi}{2}}$ oder $M = A_{-\frac{\pi}{2}}$; im Fall $c \neq 0$ bekommen wir $a = -d$, was $b = c$ impliziert. Hier ist T eine Spiegelung. Wir zeigen es, indem wir T diagonalisieren: es gilt $Char.Pol(M) = X^2 - 1$, also sind die Eigenwerte 1 und -1. $u_\vartheta = \begin{pmatrix} 1+\cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ und $v_\vartheta = \begin{pmatrix} 1-\cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ sind die Eigenvektoren. Bemerke, dass u_ϑ und v_ϑ zueinander orthogonal sind. In der Basis $(u_\vartheta, u_\vartheta)$ hat T die Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. T ist also die orthogonale Spiegelung an der Gerade $span(u_\vartheta)$.

(b) Weil $\deg(Char.Pol(T)) = 3$, besitzt $Char.Pol(T)$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ (nach dem Zwischenwertsatz hat jedes Polynom von ungeradem Grad eine Nullstelle in $\mathbb{R}$), also hat T einen Eigenwert c. Sei u ein Eigenvektor zu c und $W := span(u)$. Weil T eine Isometrie ist, ist $W^\perp$ T-invariant. $T_{W^\perp}$ kann als Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. Nach (a) gibt es also eine Basis $\mathcal{B}$ von $W^\perp$ mit $M := [T_{W^\perp}]_\mathcal{B} = A_\vartheta$ oder B_ϑ, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Es gilt dann $[T]_{\mathcal{B}\cup\{u\}} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, also entweder

$[T]_{\mathcal{B}\cup\{u\}} = \begin{pmatrix} A_\vartheta & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ oder $[T]_{\mathcal{B}\cup\{u\}} = \begin{pmatrix} B_\vartheta & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Weil T eine Isometrie ist muss $c \in \{-1, 1\}$ gelten. Falls $c = 1$ muss wegen $\det(T) = 1$ auch $\det(M) = 1$ gelten, woraus $M = A_\vartheta$ folgt. T ist dann eine Drehung um die Gerade W mit Winkel ϑ.

Wir nehmen an, dass $c = -1$. Dann muss $\det(M) = -1$ gelten, also $M = B_\vartheta$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$. $T_{W^\perp}$ ist also eine Spiegelung an einer Gerade. Sei v ein Vektor dieser Gerade; dann ist v ein Fixpunkt von T. Wir können jetzt u mit v ersetzen, was zum Fall $c = 1$ zurückführt.

Aufgabe 12.4 Schauen Sie nochmal die Zusatzaufgabe auf Blatt 10 an. In der Lösung wurde das Argument gegeben, dass man das Parallelepiped P drehen kann ohne das Volumen zu ändern; somit kann man annehmen, dass die Vektoren, die P definieren, von der Form $\mathbf{a}' = (a_1', 0, 0)$, $\mathbf{b}' = (b_1', b_2', 0)$ und $\mathbf{c}' = (c_1', c_2', c_3')$ sind. Sei T die Isometrie die $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ auf die x-Achse ($T(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$) und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ auf die xy-Ebene ($T(\mathbf{b}) = \mathbf{b}'$) abbildet. Geben Sie eine Matrixdarstellung von T wie in Aufgabe 12.3(b) an.

Lösung: Wir verknüpfen mehrere Isometrien nacheinander. Um den Vektor $\mathbf{a}$ auf die x-Achse abzubilden, wir drehen zunächst um die z-Achse und bilden $\mathbf{a}$ auf die zy-Ebene ab, dann drehen wir um die y-Achse und bilden $\mathbf{a}$ auf die x-Achse ab. Für die erste Rotation brauchen wir den Winkel ϑ zwischen der x-Achse und die Projektion $\mathbf{a}_{xy}$ von $\mathbf{a}$ auf die xy-Ebene. Diese ist $(a_1, a_2, 0)$, also $a_1 = ||\mathbf{a}_{xy}|| \cos\vartheta$ und $a_2 = ||\mathbf{a}_{xy}|| \sin\vartheta$. In der Tat, wir brauchen den Winkel ϑ nicht, Sinus und Cosinus davon sind genug. Also die Matrix der ersten Rotation ist

$$A_\vartheta = \frac{1}{||\mathbf{a}_{xy}||} \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Berechnung, finden wir $\mathbf{a}'' := \mathbf{a}A_\vartheta = \frac{1}{||\mathbf{a}_{xy}||}(a_1^2 + a_2^2, 0, a_3)$ (wir multiplizieren links weil wir $\mathbf{a}$ als Zeilenvektor geschrieben haben. Bemerke dass die y-Eintrag ist jetzt 0, also wir sind in der xz-Ebene). Nun, in der xz-Ebene, der Winkel φ zwischen $\mathbf{a}''$ und der x-Achse erfüllt $\frac{a_1^2+a_2^2}{||\mathbf{a}''||||\mathbf{a}'_{xy}||} = \cos\varphi$ und $\frac{a_3}{||\mathbf{a}''||||\mathbf{a}'_{xy}||} = \sin\varphi$. Wir brauchen also eine Rotation mit Winkel φ um die y-Achse um $\mathbf{a}''$ auf $\mathbf{a}'$ abzubilden:

$$A_\varphi = \frac{1}{||\mathbf{a}''||||\mathbf{a}'_{xy}||}\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & 0 & -a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}$$

und man kann wieder überprüfen $\mathbf{a}''A_\varphi = ((a_1^2 + a_2^2)^2 + a_3^2, 0, 0) =: \mathbf{a}'$. Also wir haben $\mathbf{a}$ auf die x-Achse abgebildet: $\mathbf{a}' = \mathbf{a}A_\vartheta A_\varphi$. Nun müssen wir $\mathbf{b}'' := \mathbf{b}A_\vartheta A_\varphi$ auf die xy-Ebene abbilden. Das machen wir mittels einer Rotation um die x-Achse, damit wir $\mathbf{a}''$ nicht weg von der x-Achse schicken. Direkte Berechnung ergibt

$$\mathbf{b}'' = \frac{((a_1^2 + a_2^2)(a_1b_1 - a_2b_2) + a_3b_3, a_2b_1 + a_1b_2, (a_1b_1 - a_2b_2)a_3 + (a_1^2 + a_2^2)b_3)}{||\mathbf{a}''||||\mathbf{a}'_{xy}||||\mathbf{a}_{xy}||}$$

Wir nehmen den Winkel ψ zwischen die Projektion $\mathbf{b}''_{yz}$ von $\mathbf{b}''$ auf der xz-Ebene und der y-Achse. Es gilt

$$\mathbf{b}''_{yz} = \frac{(0, a_2b_1 + a_1b_2, (a_1b_1 - a_2b_2)a_3 + (a_1^2 + a_2^2)b_3)}{||\mathbf{a}''||||\mathbf{a}'_{xy}||||\mathbf{a}_{xy}||}$$

und somit

$$\cos\psi = \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{||\mathbf{b}''||||\mathbf{a}''||||\mathbf{a}'_{xy}||||\mathbf{a}_{xy}||} \qquad \sin\psi = \frac{(a_1b_1 - a_2b_2)a_3 + (a_1^2 + a_2^2)b_3}{||\mathbf{b}''||||\mathbf{a}''||||\mathbf{a}'_{xy}||||\mathbf{a}_{xy}||}$$

und die Matrix A_ψ der Rotation um die x-Achse mit Winkel ψ ist

$$\frac{1}{||\mathbf{b}''||||\mathbf{a}''||||\mathbf{a}'_{xy}||||\mathbf{a}_{xy}||}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_1 + a_1b_2 & -((a_1b_1 - a_2b_2)a_3 + (a_1^2 + a_2^2)b_3) \\ 0 & (a_1b_1 - a_2b_2)a_3 + (a_1^2 + a_2^2)b_3a_2b_1 + a_1b_2 & \end{pmatrix}$$

Also $A = A_\vartheta A_\varphi A_\psi$ ist die verlangte Matrix.