Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Juli 2020

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Sommersemester 2020

Probeklausur zur Linearen Algebra II (B2) – Lösungen

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
erreichte Punktzahl							
Korrektor (Initialen)							
Maximalpunktzahl	10	10	10	10	10	10	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **6 Aufgaben**.
2. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
4. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
5. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
6. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
7. In Aufgaben, in denen Definitionen verlangt werden, dürfen Sie sämtliche Begriffe aus der Vorlesung Lineare Algebra I des vergangenen Wintersemesters als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe und Notationen müssen definiert werden.
8. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
9. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte).
S_n bezeichnet die Gruppe aller Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$.

(a) (2 Punkte) Wie ist die Abbildung sign auf S_n definiert?

Sie dürfen den Begriff „Permutation" als bekannt voraussetzen.

(b) (4 Punkte) Sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_7.$$

Schreiben Sie σ erst als Produkt disjunkter Zykel und dann als Produkt von Transpositionen. Ist σ gerade oder ungerade?

(c) (4 Punkte) Sei $n \geq 3$ und seien σ, τ zwei verschiedene Transpositionen. Zeigen Sie, dass $\sigma\tau$ entweder ein 3-Zykel oder ein Produkt von zwei 3-Zykeln ist.

Hinweis: Unterscheiden Sie die folgenden beiden Fälle: (i) σ und τ sind disjunkt. (ii) σ und τ sind nicht disjunkt.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 1:

(a) Eine Transposition in S_n ist eine Permutation, die genau $n-2$ Fixpunkte hat. sign ist die Einzige Abbildung von S_n nach $\{-1, 1\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle Transpositionen τ gilt $\text{sign}(\tau) = -1$.
- Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\text{sign}(\tau\sigma) = \text{sign}(\tau)\text{sign}(\sigma)$.

(b) $\sigma = (1375)(264) = (13)(37)(75)(26)(64)$. Diese letzte Zerlegung enthält fünf Transpositionen, also ist σ ungerade.

(c) Schreibe $\sigma = (a, b)$ und $\tau = (c, d)$. Wir nehmen zunächst an, dass σ und τ nicht disjunkt sind, also $b = c$. Dann gilt $\sigma\tau = (a, b)(b, d) = (a, b, d)$. Jetzt nehmen wir an, dass σ und τ disjunkt sind, also a, b, c, d sind paarweise verschieden. Dann gilt $(a, b)(c, d) = (a, b, c)(c, d, b)$.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Wie ändert sich die Determinante einer Matrix nach Anwendung der drei elementaren Zeilenumformungen?

(b) (4 Punkte) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix in $\mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

(c) (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie: Aus $A^t = -A$ folgt, dass A nicht invertierbar ist. Zeigen Sie dann, dass diese Aussage für den Fall $n = 2$ falsch ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 2:

1. Sei $A \in K^{n\times n}$. Weil det n-linear alternierend ist, besitzt sie folgende Eigenschaften:
   - Wenn zwei Zeilen von A umgetauscht werden, wird die Determinante mit -1 multipliziert.
   - Wenn eine Zeile Z_i durch $Z_i + cZ_j$ ersetzt wird bleibt die Determinante ungeändert.
   - Wenn eine Zeile mit $c \in K$ multipliziert wird, ist die Determinante auch mit c multipliziert.
2. Wir machen die Zeilenumformungen $Z_4 \to Z_4 - Z_3, Z_3 \to Z_3 - Z_2$ und $Z_2 \to Z_2 - Z_1$. Wir erahlten dann die Matrix
$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix}.$$
   Das ist eine Dreiecksmatrix, also ist ihre Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, also $a(b-a)(c-b)(d-c)$.
3. Wir wissen, dass $\det(A^t) = \det(A)$. Wenn wir jede Zeile von A mit -1 multiplizeren, ist die Determinante mit $(-1)^n$ multipliziert, also gilt $\det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$. Aus $A^t = -A$ folgt also $\det(A) = -\det(A)$, also $\det(A) = 0$. A ist also nicht invertierbar.

   Gegenbeispiel für $n = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Definieren Sie die Begriffe *Eigenwert*, *Eigenvektor* sowie *Eigenraum*.

(b) (4 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Finden Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, sodass $P^{-1}AP$ eine obere Dreicksmatrix ist.

(c) (2 Punkte). Bestimmen Sie die jordansche Normalform von

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 3:

(a) Sei V ein K-Vektorraum und $T \in L(V, V)$. Ein Eigenwert von T ist ein $c \in K$, so dass es ein $x \in V$ gibt mit $x \neq 0$ und $Tx = cx$. Solch ein x heißt Eigenvektor zum Eigenwert c. Der Eigenraum zum Eigenwert c ist der Unterraum von V, der durch die Menge aller Eigenvektoren zu c erzeugt wird.

(b) Wir suchen zunächst die Eigenwerte von A. Es gilt $Char.Pol(A)(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$.

Entwickelung nach der ersten Spalte:
$Char.Pol(A)(x) = (2-x) \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x)^2(1-x)$. Die Eigenwerte sind also 1 und 2.
Es gilt $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt also in $ker(A - I_3)$, also ist $\{v_1\}$ eine Jordankette der Länge 1 zum Eigenwert 1.

Seite 2 zu Aufgabe 4

Es gilt $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt in $ker(A-2I_3)^2 \setminus ker(A-2I_3)$, also ist $\{v_2, v_3\}$ ein Jordankette der Länge 2 zum Eigenwert 2, wobei $v_2 := (A-2I_3)v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir definieren also $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und es gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Sei A die angegebene Matrix. $Char.Pol(A)(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix} = (1-x)(3-x)+1 = (x-2)^2$. Die Jordansche Normalform von A ist dann entweder $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Weil $ker(A-2I)$ dimension 1 hat, muss aber $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Jordansche Normalform sein.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (10 Punkte).
Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Sei $T \in \mathscr{L}(V, V)$.

(a) (2 Punkte). Seien W und W' Unterräume von V. Definieren Sie den Ausdruck $W \oplus W'$ und was es bedeutet, dass T *diagonalisierbar* ist.

Sie dürfen den Begriff „Eigenvektor" als bekannt voraussetzen.

Sei nun $P \in \mathscr{L}(V, V)$ idempotent, d. h. $P^2 = P$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $V = \ker(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle möglichen Eigenwerte von P und bringen Sie die Eigenräume in Verbindung mit $\ker(P)$ und $\mathrm{Bild}(P)$.

(d) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass P diagonalisierbar ist und finden Sie die Diagonalform.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung, nicht jedoch aus den Übungen, verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 4:

(a) Wir schreiben $V' = W \oplus W'$, falls $V' = W + W'$ und $W \cap W' = \{0\}$. T heißt diagonalisierbar, falls es eine Basis von V gibt, die aus Eigenvektoren von T besteht.

(b) Sei $x \in V$. Es gilt $P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$ also $x - P(x) \in ker(P)$. Es gilt also $x = P(x) + x - P(x) \in \mathrm{Bild}(P) + ker(P)$. Damit ist $V = ker(P) + Bild(P)$ gezeigt.

Sei $x \in ker(P) \cap Bild(P)$. Weil $x \in Bild(P)$ gibt es $y \in V$ mit $x = P(y)$. Dann gilt $0 = P(x) = P^2(y) = P(y) = x$. Damit ist $ker(P) \cap Bild(P) = \{0\}$ gezeigt.

(c) Sei $c \in K$ ein Eigenwert von P, x ein Eigenvektor zu c. Es gilt $cx = Px = P^2x = c^2x$ und daher $c^2 = c$, also sind die einzige Möglichkeiten $c = 0$ und $c = 1$. Falls $ker(P) \neq \{0\}$ ist $ker(P)$ der Eigenraum zu 0 (Falls $ker(P) = \{0\}$ ist 0 kein Eigenwert). Wir zeigen jetzt, dass $Bild(P)$ der Eigenraum zu 1 ist, falls $P \neq 0$: Sei $x \in Bild(P)$, also $x = P(y)$. Es gilt $P(x) = P^2(y) = P(y) = x$, also ist x Eigenvektor zu 1. Umgekehrt sei x ein Eigenvektor zu 1; dann ist $x = Px \in Bild(P)$.

(d) Nach (b) gilt $V = ker(P) \oplus Bild(P)$. Es gibt also eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, so dass $(v_1, \ldots, v_i)$ eine Basis von $ker(P)$ ist und $(v_{i+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von $Bild(P)$ ist. Nach (c) sind $v_1, \ldots, v_i$ Eigenvektoren zu 0 und $v_{i+1}, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu 1, also ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, die aus Eigenvektoren besteht, also ist P diagonalisierbar. Die Darstellungsmatrix von P bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-i} \end{pmatrix}$(Blockmatrix, wobei der Block oben links die Größe $i \times i$ und der Block unten rechts die Größe $(n - i) \times (n - i)$ hat)

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Seien K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Definieren Sie Min.Pol.(A).
Dabei dürfen Sie die Begriffe „Polynom“ und „Determinante“ als bekannt voraussetzen.

(b) (5 Punkte) Seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a & -a & -2a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Min.Pol.(A). Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$ mithilfe von Min.Pol.(A).
Hinweis: Unterscheiden Sie die beiden Fälle „k gerade“und „k ungerade“.

(c) (3 Punkte) Seien K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$ und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Sei $T \in \mathscr{L}(V,V)$, sodass

$$T^3 + 2T^2 - T - 2\text{Id} = 0,$$

wobei Id die Identität auf V bezeichnet. Zeigen Sie, dass T invertierbar ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 5:

(a) Ein Anihilator von A ist ein Polynom $f \in K[x]$, so dass $f(A) = 0$ gilt. $Min.Pol(A)$ ist das normierte Anihilator von A, das alle Anihilatoren von A teilt.

(b) Falls $a = 0$ ist, gilt $A = 0$. Dann ist offensichtlich $Min.Pol(A) = 1$ und $A^k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Wir nehmen an, dass $a \neq 0$. Wir berechnen zunächst $Char.Pol(A)$.
$Char.Pol(A)(x) = \begin{pmatrix} a-x & 0 & 0 \\ 2a & -a-x & -2a \\ 0 & 0 & a-x \end{pmatrix} = -(a+x)(a-x)^2$ (Entwickelung nach der ersten Zeile). Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $Min.Pol(A) \mid Char.Pol(A)$, also
$Min.Pol(A) = (a+x), (x-a), (x-a)^2, (x-a)(a+x)$ oder $(a+x)(x-a)^2$.
Es gilt $(A + aI_3)(A - aI_3) = 0$, also ist $(x-a)(a+x)$ ein Anihilator von A, also
$Min.Pol(A) \mid (x-a)(a+x)$. Weil $A + aI_3 \neq 0$ und $A - aI_3 \neq 0$ muss $Min.Pol(A) = (x-a)(a+x) = x^2 - a^2$ gelten.
Es gilt also $A^2 = a^2 I_3$. Nach Induktion folgt dann, dass $A^{2l} = a^{2l} I_3$ und $A^{2l+1} = a^{2l} A$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

(c) Es gibt zwei mögliche Lösungen zu dieser Frage:

Lösung1 Bermerke: $\frac{1}{2}(T^2 + 2T - Id)T = Id$, also ist $\frac{1}{2}(T^2 + 2T - Id)$ die Inverse von T.

Lösung2 Das Polynom $f(x) := x^3 + 2x^2 - x - 2$ ist ein Anihilator von T, also gilt $Min.Pol(T) \mid f$. Weil $f(0) \neq 0$ ist 0 keine Nullstelle von $Min.Pol(T)$. Weil $Min.Pol(T)$ und $Char.Pol(T)$ die gleichen Nullstelle haben, ist also 0 keine Nullstelle von $Char.Pol(T)$, also gilt $\det(T) \neq 0$ und T ist invertierbar.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 6**

---

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit innerem Produkt $(.|.)$ und sei $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ orthonormal. Geben Sie fünf äquivalente Charakterisierungen dafür an, dass S *vollständig* ist.

(b) (5 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie eine orthonormale Basis (bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^4$) von $\ker(A)$.

(c) (2 Punkte). Sei V ein euklidischer Raum, also ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit innerem Produkt $(.|.)$, und sei $T \in \mathscr{L}(V, V)$ eine Isometrie mit $T^2 = -\mathrm{Id}$, wobei Id die Identität auf V bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle $x \in V$ gilt: $T(x)$ ist orthogonal zu x.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 6:

(a) (a) Für alle $x \in V$, $(x \mid x_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ impliziert $x = 0$.
   (b) $span(S) = V$
   (c) $x = \sum_{i=1}^n (x \mid x_i) x_i$ für alle $x \in V$.
   (d) $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n (x \mid x_i)(x_i \mid y)$ für alle $x, y \in V$.
   (e) $||x||^2 = \sum_{i=1}^n |(x \mid x_i)|^2$.

(b) Zeilenumformungen erhalten den Kern (siehe lineare Algebra 1). Nach den Operationen

$Z_4 \to Z_4 - Z_3 - Z_2$ und $Z_3 \to Z_3 - Z_2 - Z_1$ bekommen wir die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also ist

$\left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $ker(A)$. Jetzt wenden wir Gram-Schmidt auf $\{v_1, v_2\}$

an. Es gilt $||v_1|| = \sqrt{2}$, also definieren wir $w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Seite 2 zu Aufgabe 7

$\hat{w}_2 := v_2 - (v_2 \mid w_1)w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es gilt $||\hat{w}_2|| = 2$ also

$w_2 := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

(c) Weil T eine Isometrie ist, erhält sie den Skalarprodukt. Für alle $x \in V$ gilt dann $(Tx \mid x) = (T^2x \mid Tx) = (-x \mid Tx) = -(Tx \mid x)$ also $(Tx \mid x) = 0$.