**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**10. Juni 2021**
**Sommersemester 2021**

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lothar Sebastian Krapp
Michele Serra
Sarah-Tanja Hess

# Probeklausur zur Algebra II

**Klausurnummer:** 1

**Matrikelnummer:**

Pseudonym:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| erreichte Punktzahl | | | | |
| Korrektor (Initialen) | | | | |
| Maximalpunktzahl | 10 | 10 | 10 | 30 |

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. auf das Vorhandensein aller **3 Aufgaben**.
2. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
4. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
5. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
6. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter der Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.
7. Sie dürfen immer sämtliche Begriffe aus den Vorlesungen B1 bis B3 der vergangenen drei Semester als bekannt voraussetzen.
8. Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 1**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 1.**

(a) (2 Punkte) Formulieren Sie den **Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen**. Alle verwendeten Begriffe und Notationen in der Formulierung des Satzes dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.

(b) (4 Punkte) Sei $M$ ein Modul über einem Integritätsbereich $R$. Zeigen Sie, dass $M_{\text{tor}}$ ein Torsionsmodul ist und dass $M/M_{\text{tor}}$ torsionsfrei ist.

(c) (4 Punkte) Wie viele abelsche Gruppen der Mächtigkeit 252 gibt es bis auf Isomorphie? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung zu Aufgabe 1:**

## Seite 2 zu Aufgabe 1

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 1**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:**

## Seite 4 zu Aufgabe 1

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 2**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 2.**

(a) (2 Punkte) Definieren Sie, was es bedeutet, dass eine Ringerweiterung $R \subseteq S$ **ganz** ist.

(b) (3 Punkte) Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Integritätsbereiche. Zeigen Sie: Falls $C$ ganz über $B$ ist und $B$ ganz über $A$ ist, so ist $C$ ganz über $A$.

(c) (5 Punkte) Entscheiden Sie jeweils für folgende $\alpha \in \mathbb{C}$, ob sie ganz über $\mathbb{Z}$ sind, und begründen Sie Ihre Antwort:

(i) $\alpha = \sqrt{7} + \sqrt[20]{5}$.

(ii) $\alpha = \frac{1+\sqrt[3]{5}}{3}$.

(iii) $\alpha = s + \frac{6+2\sqrt{17}}{4}$, wobei $s \in \mathbb{Z}$ beliebig ist.

(iv) $\alpha$ ist eine beliebige Nullstelle des Polynoms $x^5 - \sqrt{2}x + 1 \in \mathbb{C}[x]$.

**Lösung zu Aufgabe 2:**

## Seite 2 zu Aufgabe 2

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 2**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

## Seite 4 zu Aufgabe 2

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 3**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 3.**

(a) (2 Punkte) Sei $R$ ein Integritätsbereich und sei $K = \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von $R$.

Definieren Sie den **ganzen Abschluss $\overline{R}^K$ von $R$ in $K$** sowie den Begriff eines **ganz abgeschlossenen Rings**. Definieren Sie ferner den Begriff eines **noetherschen Rings**.

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass jeder faktorielle Dedekindring ein Hauptidealbereich ist.

(c) (4 Punkte) Sei $k$ ein Körper und $k[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$ der Polynomring über $k$ in den Variablen $x_i$ mit $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $k[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$ ein Integritätsbereich ist. Ist $k[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$ ein Dedekindring? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung zu Aufgabe 3:**

## Seite 2 zu Aufgabe 3

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 3**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:**

## Seite 4 zu Aufgabe 3