# B4: Algebra II
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## 3.Vorlesung

20. April 2021

*Wir werden in Kapitel 2 grundsätzliche Aussagen über Moduln feststellen. Ähnliche Aussagen und Beweise haben wir in der B3 für Gruppen und Ringe etabliert, so dass hier einige Beweise als Übungsaufgaben erscheinen. In diesem Skript werden wir hauptsächlich Untermoduln sowie Homomorphiesätze für Moduln studieren.*

Sei $R$ ist stets ein kommutativer Ring mit Eins und $M$ ein $R$-Modul.

**Beispiel 3.1** (i) $M = R$ ist selbst ein $R$-Moduln. Ein Ideal von $R$ ist dann ein Untermodul. Insbesondere ist $M = \{0\}$ der trivialer Modul.

(ii) Wenn $R = \mathbb{Z}$, dann ist ein $\mathbb{Z}$-Modul eine abelsche Gruppe und ein Untermodul eine Untergruppe.

(iii) Wenn $R = K$ ein Körper ist, dann ist ein $K$-Modul ein $K$-Vektorraum, und ein Untermodul ein Unterraum.

**Definition 3.1**
Seien $M, N$ zwei $R$-Moduln.

(i) Ein <u>$R$-Moduln Homomorphismus</u> ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : M \to N$, so dass $\phi(rx) = r\phi(x)$ für alle $x \in M$ und $r \in R$.

(ii) Sei $N \leq M$ ein Untermodul. Die Faktorgruppe $M/N$ ist ein $R$-Modul, wenn sie mit der folgenden Skalarmultiplikation versehen ist:

$$\begin{array}{rcl} R \times M/N & \to & M/N \\ (r, x + N) & \mapsto & rx + N \end{array}$$

(iii) <u>Bezeichnung:</u> $\mathrm{Hom}_R(M, N) := \{\phi : M \to N \mid \phi \text{ ist ein } R-\text{Modul Homomorphismus}\}$

**Lemma 3.1**
Seien $M, N, V$ drei $R$-Moduln.

(i) $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \wedge \psi \in \mathrm{Hom}_R(N, V) \Rightarrow \psi \circ \phi \in \mathrm{Hom}_R(M, V)$.

(ii) $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \ker(\phi) \leq M \wedge \mathrm{Im}\,(\phi) \leq N$.

(iii) $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ bijektiv $\Rightarrow \phi^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, $\phi$ ist dann ein <u>$R$-Modul Isomorphismus</u>.

(iv) Sei $N \leq M$ ein Untermodul.

$$\begin{array}{rccc} \pi : & M & \to & M/N \\ & x & \mapsto & x+N \end{array}$$

ist ein $R$-Modul Homomorphismus (die Projektion).

(v) Wenn $N \leq M$, induziert $\pi$ eine Bijektion zwischen den Untermoduln von $M$, die $N$ enthalten, und den Untermoduln von $M/N$.

*Beweis.* ÜA. □

**Proposition 3.2** (Homomorphiesatz für Moduln)
Sei $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$; es gilt $M/\ker(\phi) \cong \mathrm{Im}\,(\phi)$

*Beweis.* ÜA. □

**Definition 3.2**
Sei $A \subseteq M$.

(i) Für $a \in M$ sei $Ra := \{ra \mid r \in R\} \leq M$ der von $a$ erzeugte Hauptmodul.

(ii) Die Summe $\sum_{i\in I} M_i \leq M$ einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln eines $R$-Moduls $M$ ist der Untermodul

$$\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{i\in I} x_i \mid x_i \in M_i \text{ und } x_i = 0 \text{ für fast alle } i \text{ (endliche Summe)}\}$$

(iii) Eine lineare Kombination aus $A$ ist ein $x \in M$, so dass $x = \sum_i r_i x_i$ (endliche Summe) mit $r_i \in R, x_i \in A$.

(iv) $\mathrm{Span}_R(A) := \{x \mid x \text{ lineare Kombination aus } A\} = \sum_{a\in A} Ra$ .

(v) Der von $A$ erzeugte Untermodul von $M$ ist $\sum_{a\in A} Ra$ .

(vi) $M$ ist endlich erzeugt, wenn es $A \subseteq M$ existiert mit $A$ endlich und $M = \sum_{a\in A} Ra$.

**Lemma 3.3**
Für $A \subseteq M$ ist $\sum_{a\in A} Ra$ der kleinste Untermodul von $M$, der $A$ enthält.

*Beweis.* ÜA. □

**Definition 3.3** (i) Die direkte Summe einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von $R$-Moduln ist der $R$-Modul

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid x_i = 0 \text{ für fast alle } i\}$$

versehen mit der koordinatenweise Summe $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} := (x_i + y_i)_{i\in I}$ und für $r \in R$ der Skalarmultiplikation $r(x_i)_{i\in I} := (rx_i)_{i\in I}$ .

(ii) Ein $R$-Modul $M$ ist direkte Summe einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von seinen Untermoduln wenn der $R$-Modul Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} M_i & \to & M \\ (x_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} x_i \end{array}$$

ein $R$-Moduln-Isomorphismus ist, dass heißt $\bigoplus_{i\in I} M_i \simeq \sum_{i\in I} M_i = M$ .

**Notation:** In diesem Fall, werden wir oft einfach schreiben $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ .

(iii) Sei $M$ ein $R$-Modul und $N \leq M$ ein Untermodul. Existiert ein Untermodul $V \leq M$ mit $M = N \bigoplus V$, so heißt $N$ direkter Summand von $M$ und $V$ ein Komplement zu $N$.

**Lemma 3.4**
Sei $M$ ein $R$-Modul, $N, V \leq M$ Untermoduln. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(1) $M = N \bigoplus V$

(2) $M = N + V$ und $N \cap V = \{0\}$

(3) Jedes $x \in M$ lässt sich eindeutig schreiben als $x = y + z$ mit $y \in N, z \in V$.

*Beweis.* ÜA. $\square$

**Beispiel 3.2**
$G = \mathbb{Z}_4$, $H =< 2 >$ hat kein Komplement im $\mathbb{Z}$-Modul $G$, weil die einzigen Untermoduln $\{0\}, H$ und $G$ sind.

**Lemma 3.5**
Sei $N \leq M$. Es gilt:

(1) $M$ endlich erzeugt$\Rightarrow$ $M/N$ endlich erzeugt.

(2) $N$ und $M/N$ endlich erzeugt$\Rightarrow$ $M$ endlich erzeugt.

*Beweis.* ÜA $\square$