# B4: Algebra II
# Sommersemester 2021
# Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## 4.Vorlesung

22. April 2021

*In diesem Skript werden wir die Begriffe von LA I für einen R- Moduln anstatt ein K-Vektorraum (insbesondere wenn der Ring R kein Körper K ist) anpassen. Dafür werden wir Torsionselemente in R, Torsionsfreie Moduln, sowie freie Moduln definieren. Wir werden dann lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension für freie Moduln studieren. Die Beweise hierfür sind wie in der LA I, deshalb werden einige im ÜB bearbeitet.*

Sei $R$ ist stets ein kommutativer Ring mit Eins und $M$ ein $R$-Modul.

**Definition 4.1** (i) $x \in M$ ist Torsionselement $\Leftrightarrow \exists r \in R$ , $r$ ist kein Nullteiler, mit $rx = 0$.

(ii) Setze $M_{\text{tor}} := \{x \in M \mid x \text{ Torsionselement}\}$ . Dann ist $M_{\text{tor}}$ ein Untermodul von $M$ (ÜA), den wir Torsionsmodul von $M$ nennen.

(iii) Der Modul $M$ ist torsionsfrei, wenn $M_{\text{tor}} = \{0\}$.

**Definition 4.2**
Eine Untermenge $S \subseteq M$ ist linear unabhängig, wenn für alle $r_i \in R$ und $x_i \in S$ gilt:

$$\underbrace{\sum_{i\ I} r_i x_i}_{\text{endliche Summe}} = 0 \Rightarrow \forall i, r_i = 0 \, .$$

Konvention: $S = \varnothing$ ist linear unabhängig und $\operatorname{Span}_R(\varnothing) = \{0\}$.

**Beispiel 4.1**
Es folgt aus Definition 4.1 dass $x \in M_{\text{tor}} \Rightarrow \{x\}$ ist nicht linear unbhängig.

**Definition 4.3** (i) $S \subseteq M$ ist eine Basis $\Leftrightarrow S$ ist linear unabhängig und erzeugt $M$ (i.e. $\operatorname{Span}_R(S) = M$).

(ii) Der Modul $M$ ist frei, wenn er eine Basis hat.

**Bemerkung 4.1**
Die Untermenge $S$ ist genau dann eine Basis von $M$, wenn jedes $x \in M$ eine eindeutige Darstellung als lineare Kombination aus $S$ hat (i.e. $x = \sum_{i\ I} r_i x_i$ für geeignete $r_i \in R$ und $x_i \in S$.)

**Beispiel 4.2** (i) Jeder $K$-Vektorraum über ein Körper $K$ hat eine Basis und ist also frei als $K$-Modul.

(ii) Betrachte aber $G := \mathbb{Z}_2 =< 1 >$ , dann ist $G$ nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul, weil $1 \in G_{\text{tor}}$ .

Lemma 4.1 charakterisiert Basen von torsionsfreie Moduln, der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen:

**Lemma 4.1**
Sei $R$ ein Integritätsbereich, $M$ torsionsfrei und $S \subseteq M$. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(1) $M$ ist frei mit Basis $S$

(2) $M = \bigoplus_{x \in S} Rx$

*Beweis.* ÜA. □

**Lemma 4.2**
Sei $I \lhd R$, dann sind

(1) $IM := \{ \underbrace{\sum_j r_j y_j}_{\text{endliche Summe}} \mid r_j \in I, y_j \in M\}$ ein Untermodul von $M$

(2) $M/IM$ ein $R/I$-Modul.

*Beweis.* (1) Der Beweis folgt unmittelbar (ÜA).

(2) Die Verknüpfung Summe auf $M/IM$ ist die Summe von Nebenklassen wie üblich. Betrachte nun die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} R/I \times M/IM & \to & M/IM \\ (\bar{r}, \bar{x}) & \mapsto & \overline{rx} \end{array}$$

und verifiziere dafür die Axiome für Moduln (ÜA).

□

**Lemma 4.3**
Sei $M$ frei als $R$-Modul mit Basis $\{x_j\}_{j \in J}$. Sei $I \lhd R$. Dann ist $M/IM$ frei als $R/I$-Modul mit Basis $\{\overline{x}_j\}_{j \in J}$

*Beweis.* Bemerke dass $\{\overline{x}_j\}$ offensichtlich $M/IM$ erzeugt (ÜA). Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit über $R/I$.

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{r}_j \bar{x}_j = 0 &\Leftrightarrow \sum_j r_j x_j \in IM \\ &\Leftrightarrow \sum_j r_j x_j = \sum_l t_l y_l \end{aligned}$$

für geeignete $t_l \in I, y_l \in M$. Nun schreiben wir jedes $y_l = \sum_k r_{l,k} x_k$, und schreiben entsprechend $\sum_l t_l y_l$ um. Wir bekommen $\sum_j r_j x_j = \sum_k s_k x_k$ mit $s_k \in I$. Die Eindeutigkeit der Darstellung bezüglich einer Basis impliziert nun $r_j \in I$ für alle $j$, also $\overline{r}_j = 0$. □

**Korollar 4.4**
Sei $M$ ein freier $R$-Modul, und $S$ eine Basis mit $|S| = n \in \mathbb{N}$. Dann haben alle anderen Basen Kardinalität $n$.

*Beweis.* Wenn $R = K$ ein Körper ist, dann ist $M$ ein $K$-Vektorraum und $\dim_K M = n$ ist eindeutig. Ohne Einschränkung sei also $R$ kein Körper, und sei $I \lhd R$ maximal, so dass $K = R/I$ ein Körper ist. Sei $S = \{x_j\}$. Dann ist $\{\overline{x}_j\}$ eine $R/I$-Basis für den $K$-Vektorraum $M/IM$. Wenn $\{y_k\}$ eine beliebige Basis von $M$ ist, dann ist ebenso $\{\overline{y}_k\}$ eine $R/I$-Basis für $M/IM$. □

**Korollar 4.5**
$M$ endlich erzeugt und frei$\Rightarrow$ jede Basis ist endlich.

*Beweis.* Sei $\{x_j\}_j$ endlich und erzeugend. Dann ist $\{\overline{x}_j\}_j$ erzeugend für $M/IM$ als $R/I$-Vektorraum (für $I$ maximales Ideal), also ist $M/IM$ endlich dimensional und damit sind notwendigerweise alle Basen von $M$ endlich. □

**Bemerkung 4.2**
Wir haben gezeigt: $M$ frei mit $\{x_j\}_{j\in J}$ Basis, dann ist $|J|$ eindeutig definiert.

**Definition 4.4**
Sei $M$ frei mit Basis $\{x_j\}_{j\in J}$. Wir definieren $\dim_R M := |J|$.

**Bemerkung 4.3**
Wir haben in Korollar 4.4 gezeigt:
$\dim_R M = \dim_K V$, wobei $K = R/I$ und $V = M/IM$, $I$ ein maximales Ideal von $R$.