B4: Algebra II
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

5.Vorlesung

27. April 2021

In diesem Skript charakterisieren wir endlich erzeugte, beziehungsweise freie Moduln, und erklären den Zusammenhang zwischen freie und torsionsfreie Moduln. Im letztem Abschnitt setzen wir voraus, dass R ein Hauptidealbereich ist, und untersuchen endlich erzeugte, beziehungsweise freie Moduln und ihre Untermoduln.

Sei R ist stets ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R-Modul.

Definition 5.1
Der Modul $R^n := \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in R\}$ mit Komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation, und standard Basis: $\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$ ist der freie R-Modul vom Rang n.

Lemma 5.1
Es gilt: M ist endlich erzeugt $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ und einen Untermodul $K \leq R^n$ mit $M \cong R^n/K$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ Lemma 3.5
„$\Rightarrow$“ Sei $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ erzeugend. Betrachte

$$\begin{array}{cccc} \phi & R^n & \to & M \\ & (r_1, \dots, r_n) & \mapsto & \sum r_i x_i \end{array}$$

Dann ist ϕ ist ein surjektiver Homomorphismus mit $K := \ker(\phi)$ (ÜA). Die Behauptung folgt nun aus Proposition 3.2 (Homomorphiesatz für Moduln). $\square$

Korollar 5.2
Sei $M \neq \{0\}$ endlich erzeugt, mit $\{x_1, \dots, x_n\}$ erzeugend, und ϕ der surjektiver Homomorphismus in Lemma 5.1. Dann gilt: M ist genau dann frei mit Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$, wenn $\ker(\phi) = \{0\}$. Inbesondere für $x \neq 0$, $x \in M$, ist der Hauptmodul Rx genau dann frei mit Basis $\{x\}$, wenn $\{r \in R \mid rx = 0\} = \{0\}$.

In Definition 4.1 haben wir folgende definiert:

- $M_{\text{tor}} = \{x \in M \mid \exists r \text{ kein Nullteiler }, rx = 0\}$.
- M ist torsionsfrei, wenn $M_{\text{tor}} = \{0\}$.
- M ist ein Torsionsmodul, wenn $M_{\text{tor}} = M$.

Lemma 5.3 (a) M_{tor} ist ein Torsionsmodul und

(b) M/M_{tor} ist torsionsfrei.

Beweis. (a) ÜA

(b) Sei $\bar{x} \in M/M_{\text{tor}}$, $\bar{x}$ Torsionselement. Es existiert $b \in R$ kein Nullteiler mit $b\bar{x} = 0$, d.h. $bx \in M_{\text{tor}}$, also gibt es $c \in R$ kein Nullteiler mit $cbx = 0 =$, also $x \in M_{\text{tor}}$ und $\bar{x} = 0$.

$\square$

Lemma 5.4 (i) M frei $\Rightarrow M$ torsionsfrei.

(ii) M torsionsfrei und $N \leq M \Rightarrow N$ torsionsfrei.

(iii) R Integritätsbereich $\Rightarrow M_{\text{tor}} = \{x \in M \mid \exists r \in R, r \neq 0, rx = 0\}$

(iv) R Integritätsbereich, $x \notin M_{\text{tor}} \Rightarrow Rx$ ist frei.

Beweis. Wir beweisen (i): Sei $x \in M_{\text{tor}}$ und $\{x_i\}_{i \in J}$ eine Basis von M. Schreibe $x = \sum r_i x_i$ und sei $r \in R$ kein Nullteiler, so dass $rx = 0$. Es folgt $\sum (rr_i) x_i = 0$. Aber $\{x_i\}$ linear unabhängig $\Rightarrow rr_i = 0 \,\forall i \Rightarrow r_i = 0 \,\forall i \Rightarrow x = 0$.
Beweise von (ii), (iii), (iv): ÜA.

□

Lemma 5.4 werden wir stillschweigend in den nächsten Abschnitt benutzen.

§Moduln über Hauptidealbereiche

Sei nun R stets ein Hauptidealbereich, M, F und N R- Moduln.

Satz 5.1
Sei F endlich erzeugt und frei, und $M \leq F$. Dann ist M frei und $\dim_R M \leq \dim_R F$. Insbesondere ist M endlich erzeugt.

Beweis. Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis für F. Setze $M_m = M \cap \text{ Span}_R\{x_1, \dots x_m\}$ für $m \leq n$. Wir zeigen per Induktion, dass M_m frei ist mit $\dim_R M_m \leq m$ (und damit gilt es auch für $M = M_n$).
Da $x_1 \notin M_{\text{tor}}$, ist Rx_1 frei. Betrachte $M_1 = M \cap Rx_1$ und

$$\begin{array}{cccc} \phi: & R & \xrightarrow{\sim} & Rx_1 \\ & r & \longmapsto & rx_1 \end{array}$$

• Da $M_1 \leq Rx_1$ ist $\phi^{-1}(M_1) \trianglelefteq R$, also ist $\phi^{-1}(M_1) =< a_1 >$ für $a_1 \in R$ und

$$M_1 = \phi(< a_1 >) = R(a_1 x_1)\,.$$

Also ist M_1 frei mit $\dim_R M_1 \leq 1$.
• Per Induktion nehmen wir nun an: M_m ist frei, $\dim M_m \leq m$.
Die Menge $\{a \in R \mid \exists x \in M, \text{ so dass } x = b_1 x_1 + \cdots + b_m x_m + a x_{m+1}\}$ ein Ideal in R (ÜA).
Sei $a_{m+1} \in R$ ein Erzeuger davon. Ist $a_{m+1} = 0$, so ist $M_{m+1} = M_m$ und unser Beweis ist fertig. Sonst gilt $a_{m+1} \neq 0$: Setze $w = a_{m+1} x_{m+1} + v \in M_{m+1}$ mit $v \in \text{ Span}\{x_1, \dots, x_m\}$. Sei $x \in M_{m+1}$; es existieren $b_1, \dots, b_m, a \in R$ mit $x = b_1 x_1 + \cdots + b_m x_m + a x_{m+1}$, also

$$\begin{aligned} x &= b_1 x_1 + \cdots + b_m x_m + (c a_{m+1}) x_{m+1} \\ &= (b_1 x_1 + \cdots + b_m x_m) + (cw - cv), \end{aligned}$$

also $x - cw = \sum b_i x_i - cv \in M_{m+1} \cap \text{ Span}\{x_1, \dots, x_m\} = M_m$. Wir haben gezeigt:
$M_{m+1} = M_m + Rw$ mit $w \neq 0$, $w \notin M_{\text{tor}}$, Rw frei mit Basis $\{w\}$. Außerdem ist $M_m \cap Rw = \{0\}$, also $M_{m+1} = M_m \oplus Rw$ und damit direkte Summe von freien Moduln, also ist M_{m+1} frei und $\dim_R M_{m+1} = \dim_R M_m + \dim_R Rw \leq m + 1$. □

Korollar 5.2
Sei M endlich erzeugt und $N \leq M$. Dann ist N endlich erzeugt.

Beweis. OE gilt $M = R^n/K$ (per Lemma 5.1). Betrachte

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & R^n & \to & R^n/K \\ & y & \mapsto & \bar{y} \end{array}$$

Projektionshomomorphismus.
$N \leq R^n/K \Rightarrow \Pi^{-1}(N) \leq R^n$. Satz 5.1$\Rightarrow \Pi^{-1}(N)$ ist endlich erzeugt.
Lemma 3.5 $\Rightarrow N = \Pi^{-1}(N)/K$ ist auch endlich erzeugt.

□

Satz 5.3
Sei M endlich erzeugt und torsionsfrei. Dann ist M frei.

Beweis. Sei $\{y_1 \ldots, y_m\} \subseteq M$ erzeugend und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ darunter maximal linear unabhängig.
Sei $y \in \{y_1, \ldots, y_m\}$. Nach Maximalität existieren $a, b_1, \ldots, b_n \in R$ nicht alle 0, so dass
$ay + b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n = 0$ und $a \neq 0$ (weil $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig).
Wir sehen also:
$\forall j = 1, \ldots, m, \exists a_j \in R, a_j \neq 0 \wedge a_j y_j \in$ Span$\{v_1, \ldots, v_n\}$, also $(a_1 \ldots a_m)M \leq \underbrace{\text{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}}_{\text{frei}}$,
also (Satz 5.1) ist $(a_1 \ldots a_m)M$ frei. Nun ist

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & (a_1 \ldots a_m)M \\ x & \longmapsto & (a_1 \ldots a_m)x \end{array}$$

eine Isomorphie, weil $a_1 \ldots a_m \neq 0$ und M torsionsfrei ist. Also ist M auch frei.

□