B4: Algebra II
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

6.Vorlesung

29. April 2021

Unser nächstes Ziel ist es, den Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealbereiche zu beweisen (Satz 6.8). In diesem Skript bauen wir den Beweis schrittweise auf. Satz 6.2 ergibt eine Zerlegung als direkte Summe von frei und Torsionsmodul, Satz 6.6 untersucht die Struktur vom Torsionsmodul, und Satz 6.7 ergibt eine weitere Verfeinerung der Struktur. Für den Beweis vom Satz 6.7 brauchen wir einige Vorbereitung, die wir am Ende des Skriptes bringen. Satz 6.7 wird schließlich in Skript 7 zuende bewiesen.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit Eins, und M ein R–Modul.

Lemma 6.1
Seien E und E' R-Moduln, E' frei. Sei $f : E \to E'$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann existiert ein freier Untermodul $F \leq E$, so dass $f \restriction F : F \to E'$ eine Isomorphie ist und $E = F \bigoplus \ker(f)$.

Beweis. Sei $\{x'_i\}_{i\in I}$ eine Basis für E'. Für alle $i \in I$ wähle $x_i \in E$ mit $f(x_i) = x'_i$ und setze $F := \operatorname{Span}_R\{x_i \mid i \in I\}$. Dann ist $\{x_i\}_{i\in I}$ linear unabhängig (ÜA), also ist F frei. Sei nun $x \in E$ und nimm $a_i \in R$, so dass $f(x) = \sum a_i x'_i$. Es gilt $f(x - \sum a_i x_i) = 0$ und damit $x - \sum a_i x_i \in \ker(f)$. Wir haben gezeigt: $E = F + \ker(f)$.
Außerdem ist $F \cap \ker(f) = \{0\}$ (ÜA). □

Sei nun R ein Hauptidealbereich und M ein R–Modul.

Satz 6.2
Sei R ein Hauptidealbereich und M ein R–Modul. Ist M endlich erzeugt, so ist $M = M_{\text{tor}} \bigoplus F$, wobei $F \leq M$ ein freier Untermodul ist. Die Dimension $\dim_R F$ ist von der Wahl von F unabhängig.

Beweis. Betrachte den Homomorphismus:

$$\begin{array}{cccc} \phi : & M & \to & M/M_{\text{tor}} \\ & x & \mapsto & \bar{x} \end{array}$$

Nun ist M/M_{tor} endlich erzeugt, also (Satz 5. 3) ist er frei.
Lemma 6.1 liefert $F \leq M$, F frei mit $M = \ker(\phi) \bigoplus F$ und $\phi \restriction F : F \cong M/M_{\text{tor}}$, damit ist $\dim_R F = \dim_R M/M_{\text{tor}}$ eindeutig bestimmt. □

Definition 6.1
$\dim_R F$ im Satz 6.2 ist der <u>(freier) Rang von M</u>.

Wir werden nun M_{tor} weiter untersuchen; wir untersuchen also endlich erzeugte Torsionsmoduln.

Definition 6.2 (a) Für $r \in R$ ist $M[r] := \{x \in M \mid rx = 0\}$ der <u>r-Torsionsmodul</u>.

(b) $M[r^\infty] := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M[r^k]$.

Lemma 6.3
Sei M ein endlich erzeugter Torsionsmodul, dann $\exists a \in R, a \neq 0$ mit $aM = 0$.

Beweis. Seien $v_1, \dots, v_n$ Erzeuger, $a_1, \dots, a_n \in R$ mit $a_i \neq 0$ und $a_i v_i = 0$; setze $a := a_1 \dots a_n$. $\square$

Lemma 6.4
Sei M endliche erzeugter Torsionsmodul und wähle $0 \neq a \in R$ mit $aM = 0$. Wenn $a = bc$ mit $ggT(b, c) = 1$, dann ist $M = M[b] \bigoplus M[c]$.

Beweis. Da R HIR ist, existieren $x, y \in R$ mit $1 = xb + yc$. Sei $v \in M$; es ist $v = xbv + ycv$. Dann ist $xbv \in M[c]$ und $ycv \in M[b]$, also $M = M[b] + M[c]$. Sei $v \in M[b] \cap M[c]$; wir rechnen $v = (xb + yc)v = xbv + ycv = 0$. $\square$

Lemma 6.5
M endlich erzeugt $\Rightarrow |\{p \in R \mid p \text{ prim und } M[p^\infty] \neq 0\}| < \infty$.

Beweis. Wähle $a \neq 0$ mit $aM = 0$, $a \in R$. Da R HIR ist, ist R faktoriell. Wir können also die Primfaktorisierung von a ausnutzen, und Lemma 6.4 wirderholt anwenden. Die Induktion ergibt

$$M = M[a] = \bigoplus_{p|a, p \text{ prim}, M[p^\infty]\neq 0} M[p^\infty]$$

$\square$

Bemerkung 6.1
Die Darstellung hängt nicht von a ab; ist nämlich $M = M[b]$, q prim, $q \mid b$ aber $q \nmid a$, dann ist $ggT(a, q) = 1$ und damit $M = M[aq] = M[a] \bigoplus M[q] = M$, also $M[q] = 0$

Wir können nun aus Lemma 6.5 folgern:

Satz 6.6
Sei $0 \neq M$ endlich erzeugter Torsionsmodul. Dann ist

$$M = \bigoplus_{p \text{ prim mit } M[p^\infty]\neq 0} M[p^\infty]$$

Beweis. Sei $a \in R$ mit $aM = 0$. Da R HIR ist, ist R faktoriell. Wir können also die Primfaktorisierung von a ausnutzen, und Lemma 6.5 anwenden (ÜA). $\square$

Wir wollen nun diese $M[p^\infty]$ weiter untersuchen. Den folgenden Satz werden wir im Skript 7 beweisen:

Satz 6.7
Sei $0 \neq M$ endlich erzeugt; $p \in R$ prim mit $M[p^\infty] \neq 0$. Dann existiert eine eindeutige Folge $1 \leq \nu_1 \leq \dots \leq \nu_s \in \mathbb{N}$, so dass $M[p^\infty] \cong R/ < p^{\nu_1} > \oplus \dots \oplus R/ < p^{\nu_s} >$.

Als Korollar zum Satz 6.7 erhalten wir sofort:

Satz 6.8
Sei R ein HIR und M ein R-Modul. Ist M endlich erzeugt über R, so ist

$$M \cong R^d \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{j=1}^{t_i} R / < p_i^{\nu_{ij}} >$$

mit eindeutigen $d, s \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_s$ paarweise verschiedene Primelemente, $t_s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq \nu_{ij} \leq \cdots \leq \nu_{it_s} \in \mathbb{N}$.

□

Für den Beweis vom Satz 6.7 brauchen wir:

Terminologie:

1. $y_1, \dots, y_m \in M$ sind unabhängig wenn $\operatorname{Span}\{y_1, \dots, y_m\} \cong \bigoplus_{i=1}^m Ry_i$, oder die folgende äquivalente Bedingung gilt: $a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m = 0 \Rightarrow a_i y_i = 0$ für alle $a_1, \dots, a_m \in R$.

   Bemerkung 6.2
   Wenn $y_1, \dots, y_m \in M$ linear unabhängig sind, dann sind sie auch unabhängig; die Umkehrung dieser Aussage gilt für Torsionsfreie Moduln (ÜA).

2. Sei $x \in M$,

$$\begin{array}{rccc} \phi_x : & R & \to & Rx \\ & r & \mapsto & rx \end{array} .$$

   Es gelten: $I_x := \ker(\phi_x)$ ist Hauptideal und $R/I_x \cong Rx$. Ein erzeuger für I_x heißt eine <u>Periode</u> für x.

Bemerkung 6.3 (i) Sei $0 \neq M = M[p^\nu]$ ein p^ν-Torsionsmodul. Sei $x \neq 0$, $x \in M$, dann ist eine Periode für x (bis auf Einheit) der Gestalt p^l mit $l \leq \nu$.

(ii) ist ν minimal dafür, dass $M = M[p^\nu]$, so gibt es $x \in M$ mit Periode genau p^ν.

(iii) Sei $x \in M$ mit Periode p^ν; setze $\overline{M} := M/Rx$. Es ist $\overline{M} = \overline{M}[p^\nu]$ und für jeden Vertreter y von $\bar{y} \in \bar{M}$ mit Perioden p^l beziehungsweise $p^{\bar{l}}$ gilt $l \geq \bar{l}$.

(iv) Ist p^ν minimal dafür, dass $M = M[p^\nu]$ und p^μ minimal dafür, dass $\bar{M} = \bar{M}[p^\mu]$, dann gilt $\mu \leq \nu$.

Beweis. (i): Nehme $l :=$ die kleinste natürliche Zahl, wofür es gilt $p^l x = 0$.

(ii), (iii), (iv): ÜA. □