B4: Algebra II
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

7. Vorlesung

4. Mai 2021

In diesem Skript beweisen wir Satz 6.7 und damit den Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealbereiche Satz 6.8. Im nächstem Abschnitt untersuchen wir dann Noethersche Moduln und Ringe.

Sei R stets ein Hauptidealbereich und M ein R–Modul.

Wir müssen zuerst Lemma 7.1 beweisen. Wir werden dafür Bemerkung 6.3 stillschweigend gebrauchen.

Lemma 7.1
Sei $p \in R$ prim, $M = M[p^\nu]$, $\nu \geq 1$ und minimal dafür. Wähle $x_1 \in M$ mit Periode p^ν. Setze $\overline{M} := M/Rx_1$. Seien $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m \in \overline{M}$ unabhängig. Dann gibt es Vertreter $y_i \in \bar{y}_i$ mit Periode(y_i)=Periode$(\bar{y}_i)$ und so dass $x_1, y_1, \dots, y_m \in M$ unabhängig sind.

Beweis. Sei $\bar{y} \in \bar{M}$ mit Periode p^n, $1 \leq n$. Sei $y \in \bar{y}$ ein Verterter. Dann ist $p^n\bar{y} = 0$ oder es gibt $r \in R$ so dass $p^n y = rx_1 \in Rx_1$. Da R faktoriell ist, sei $c \in R, p \nmid c$, und $s \leq \nu$ so dass

$$(\dagger) \qquad p^n y = rx_1 = p^s c x_1\ .$$

• Ist $s = \nu$, dann gilt $p^n y = p^\nu x_1 c = 0$, also y hat Periode $\leq p^n$ und damit genau $= p^n$, und so ist der Fall erledigt.
• Is aber $s < \nu$, dann hat $p^s c x_1$ Periode $p^{\nu-s}$ und damit hat y Periode $p^{n+\nu-s}$, also muss $n + \nu - s \leq \nu$ gelten (weil $p^\nu M = 0$), also $n \leq s$, wir sehen also, dass $y - p^{s-n} c x_1 \in \bar{y}$ (vgl $(\dagger)$) und hat Periode p^n.
• Sei nun y_i Vertreter von $\bar{y}_i$ mit gleicher Periode. Wir zeigen: $x_1, y_1, \dots, y_m$ sind unabhängig. Seien $a, a_1, \dots, a_m \in R$ mit

$$(\ddagger) \qquad ax_1 + a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m = 0$$

Dann ist $a_1\bar{y}_1 + \cdots + a_m\bar{y}_m = 0$, also muss $a_i\bar{y}_i = 0 \quad \forall i$ sein.
Ist p^{r_i} die Periode von $\bar{y}_i$, dann gilt $p^{r_i} \mid a_i$; p^{r_i} ist aber Periode für y_i, also gilt $a_i y_i = 0$ für alle i und damit ist (zurück in $(\ddagger)$) auch $ax_1 = 0$.

$\square$

Zur Erinnerung, wiederholen wir hier die Aussage vom Satz 6.7:

Satz 6.7 : Sei $0 \neq M$ endlich erzeugt; $p \in R$ prim mit $M[p^\infty] \neq 0$. Dann existiert eine eindeutige Folge $1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_s \in \mathbb{N}$, so dass $M[p^\infty] \cong R/<p^{\mu_1}> \oplus \cdots \oplus R/<p^{\mu_s}>$.

Beweis vom Satz 6.7. $M[p^\infty]$ endlich erzeugt$\Rightarrow$ O.E. $M = M[p^\infty]$ und (da M endlich erzeugt ist) $\exists x_1 \in M$ mit Periode p^ν, $\nu \in \mathbb{N}$ minimal so dass $M = M[p^\nu]$ (ÜA).
Betrachte $M[p]$; da $M[p]$ p-torsion ist, ist eine Skalarmultiplikation

$$\begin{array}{rcl} R/<p> \times M[p] & \to & M[p] \\ (a+<p>, x) & \mapsto & ax \end{array}$$

wohldefiniert: $\bar{a}_1 = \bar{a} \Rightarrow (a - a_1) = pa_2 \Rightarrow (a_1 - a)x = a_2 px = 0$.
Also ist $M[p]$ ein $R/<p>$-Vektorraum.
Setze $\overline{M} := M/Rx_1$. Analog zeigt man dass $\overline{M}[p]$ ein $R/<p>$-Vektorraum (ÜA).

Behauptung: $\dim \overline{M}[p] < \dim M[p]$ als $R/<p>$-Vektorräume.

Beweis. Seien $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_m \in \overline{M}[p]$ und $R/<p>$-linear unabhängig. Lemma 7.1 liefert $y_i \in \bar{y}_i$ mit Periode p, so dass $x_1, y_1, \ldots, y_m$ unabhängig. Setze $z_1 := p^{\nu_1 - 1}x_1$. Dann hat z_1 Periode p, $z_1 \in M[p]$ und $z_1, y_1, \ldots, y_m \in M[p]$ sind immernoch unabhängig, und damit auch $R/<p>$-linear unabhängig (ÜA). □

• Wir zeigen nun die Existenzaussage im Satz. Wir argumentieren per Induktion nach $\dim_{R/<p>} M[p]$.
O.E. ist $\overline{M} \neq 0$ (sonst ist $M \cong Rx_1 \cong R/<p^\nu>$).

Die Induktionsannahme impliziert dass

$$\overline{M} = \overline{M}[p^\infty] \cong R\bar{x}_2 \oplus \cdots \oplus R\bar{x}_s$$

und die Periode von $\bar{x}_i$ ist p^{n_i}, das heißt

$$R\bar{x}_i \cong R/<p^{n_i}>, i = 2, \ldots, s\,.$$

Lemma 7.1 impliziert dass $\exists x_2, \ldots, x_s \in M$ so dass x_i Periode p^{n_i} hat und $x_1, \ldots, x_s$ unabhängig, das heißt:

$$M = M[p^\infty] \cong Rx_1 \oplus \cdots \oplus Rx_s \cong R/<p^\nu> \oplus R/<p^{n_2}> \oplus \cdots \oplus R/<p^{n_s}>,$$

wie behauptet.

• Wir zeigen nun die Eindeutigkeit.
Sei

$$(*) \qquad 0 \neq M = M[p^\infty] \cong R/<p^{\mu_1}> \oplus \cdots \oplus R/<p^{\mu_s}>,$$

wobei $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_s$. Setze $\mu := \mu_s$. Aus $(*)$ folgt dass $M = M[p^\mu] \supsetneq M[p^{\mu-1}]$, i.e. μ ist minimal dafür dass $M = M[p^\mu]$, also ist μ **eindeutig**. Beachte, dass

$$M[p], M[p^2]/M[p], \ldots, M[p^\mu]/M[p^{\mu-1}]$$

alle $R/<p>$-Vektorräume sind, und:

$$(\dagger) \qquad M[p] \cong <p^{\mu_1 - 1}> / <p^{\mu_1}> \oplus \cdots \oplus <p^{\mu_s - 1}> / <p^{\mu_s}>\,.$$

Diese letzte Behauptung $(\dagger)$ folgt aus $(*)$ und diese allgemeine Bemerkungen (ÜA):

$$(R/<p^m>)[p] = <p^{m-1}> / <p^m> \text{ und } (N \oplus K)[p] \cong N[p] \oplus K[p]\,.$$

Bemerke auch dass die $\dim_{R/<p>} < p^{\mu_i - 1} > / < p^{\mu_i} >= 1$: die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} R & \to & < p^{m-1} > / < p^m > \\ x & \mapsto & p^{m-1}x + < p^m > \end{array}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus mit Kernel $< p >$.
Also folgt aus (†) dass

$$\dim_{R/<p>} M[p] = s = \sharp\{i \mid \mu_i \geq 1\} ,$$

damit ist s **eindeutig**.
Schreibe nun (folgt analog zum (†))

$$(**) \qquad M[p^2] \cong \bigoplus_{\mu_i = 1} R/ < p > \oplus \bigoplus_{\mu_i > 1} < p^{\mu_i - 2} > / < p^{\mu_i} >$$

Aus $(**)$ folgt:

$$M[p^2]/M[p] \cong \bigoplus_{\mu_i \geq 2} (< p^{\mu_i - 2} > / < p^{\mu_i} >)/(< p^{\mu_i - 1} > / < p^{\mu_i} >)$$

d.h

$$M[p^2]/M[p] \cong \bigoplus_{\mu_i \geq 2} < p^{\mu_i - 2} > / < p^{\mu_i - 1} > .$$

Da $< p^{m-2} > / < p^{m-1} >\cong R/ < p >$ und $\dim_{R/<p>} < p^{m-2} > / < p^{m-1} >= 1$ ist also

$$\dim_{R/<p>} M[p^2]/M[p] = \sharp\{i \mid \mu_i \geq 2\} .$$

Allgemeiner berechnen wir

$$(\ddagger) \qquad \dim_{R/<p>} M[p^m]/M[p^{m-1}] = \sharp\{i \mid \mu_i \geq m\}, m = 1, 2, \ldots, \mu .$$

Insbesondere:

$$\dim_{R/<p>} M[p^\mu]/M[p^{\mu-1}] = \sharp\{i \mid \mu_i \geq \mu\} = \sharp\{i \mid \mu_i = \mu\} .$$

Da s, und die größte natürliche Zahl μ der Folge $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_s$ eindeutig sind, folgt nun aus (‡) die Eindeutigkeit von μ_i für alle $i = 1, \cdots, s$ (ÜA). □

§<u>Noethersche Moduln</u>

Sei R ein Ring, M ein R-Modul.

Proposition 7.1
Folgende Aussagen sind äquivalent für M:

1. jeder $N \leq M$ ist endlich erzeugt
2. jede aufsteigende Kette $N_1 \leq N_2 \leq \ldots$ von Untermoduln wird stationär, d.h $\exists i$ mit $N_i = N_{i+1} = \ldots$
3. jede $\varnothing \neq \mathcal{U}$ Menge von Untermoduln von M besitzt ein inklusionsmaximales Element.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Setze $N := \bigcup_i N_i$, $N \leq M$.
Seien $x_1, \dots, x_r \in N$ mit $N :=$ $\text{Span}_R\{x_1, \dots, x_r\}$ und $i \in \mathbb{N}$, so dass $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq N_i$. Dann ist $N \subseteq N_i$ und damit $N_i = N = N_{i+1} = \dots$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $N_1 \in \mathcal{U}$ nicht maximal. Dann gibt es $N_2 \in \mathcal{U}$ mit $N_1 \subsetneq N_2$. Wiederhole mit N_2: $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3 \subsetneq \dots$ usw. Diese Prozedur muß nach endlich vielen Schritten anhalten und damit ein maximales Element produzieren.
(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $N \leq M$ und $\mathcal{U}$ die Menge aller seinen endlich erzeugten Untermoduln. Es gilt $\mathcal{U} \neq \varnothing$ weil $\{0\} \in \mathcal{U}$. Sei $N' =$ $\text{Span}_R\{x_1, \dots, x_r\}$ ein maximales Element von $\mathcal{U}$. Ist $N \supsetneq N'$, existiert dann $x \in N \backslash N'$ und $\text{Span}_R\{x_1, \dots, x_r, x\} \supsetneq N'$: Widerpsruch. $\square$

Definition 7.1 (a) Der Modul M ist noethersch, wenn eine der Bedingungen (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) von Proposition 7.1 erfüllt ist.

(b) Insbesondere: R ist ein noethersche Ring wenn jedes Ideal von R endlich erzeugt ist.