B4: Algebra II
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

8.Vorlesung

6. Mai 2021

In diesem Skript untersuchen wir Noethersche Moduln und Ringe weiter, insbesondere beweisen wir Hilbert's Basissatz und einige Korollare. Damit beenden wir Kapitel 2. Am Ende des Skriptes beginnen wir Kapitel 3 über Ganzheit.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R–Modul.

Lemma 8.1
Sei $N \leq M$. Es gilt: M ist noethersch $\Leftrightarrow$ N ist noethersch und M/N ist noethersch.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $N' \leq N$, nun $N' \leq N \Rightarrow N' \leq M$, also ist N' endlich erzeugt. Damit haben wir gezeigt dass N noethersch ist. Sei nun $A/N \leq M/N$, wobei $A \leq M$ und $N \leq A$. Also ist A endlich erzeugt und damit auch A/N (wegen Lemma 3.5).

„$\Leftarrow$" Sei $A \leq M$. Wir nutzen dass $A + N/N \cong A/A \cap N$ (siehe ÜB).
Nun $A + N/N \leq M/N \Rightarrow A + N/N$ endlich erzeugt, es folgt $A/A \cap N$ ist endlich erzeugt.
Aber auch $A \cap N \leq N \Rightarrow A \cap N$ ist endlich erzeugt. Lemma 3.5 impliziert nun, dass A endlich erzeugt ist.

□

Korollar 8.2
M_1, M_2 noethersch$\Rightarrow$ $M_1 \oplus M_2$ noethersch.

Beweis. $M_1 \oplus M_2/M_1 \cong M_2$ ist noethersch und M_1 ist noethersch. □

Korollar 8.3
Sei R noethersch und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M noethersch.

Beweis. Lemma 5.1 $\Rightarrow M \cong R^n/K$.
Korollar 8.2 $\Rightarrow R^n = R \oplus \cdots \oplus R$ ist noethersch (Induktion).
Lemma 8.1 $\Rightarrow M$ ist noethersch. □

Satz (Hilbert Basissatz)
Sei R noethersch, dann ist $R[x]$ noethersch.

Beweis. Sei $I \lhd R[x]$. Betrachte $J := \{a \in R \mid a \text{ ist Leitkoeffizient von } f \in I\}$.
Es ist ein Ideal von R (ÜA), also gibt es $f_1, \ldots, f_n \in I$, so dass die Leitkoeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ von $f_1, \ldots, f_n$ das Ideal J erzeugen. Setze $d := \max_i \deg f_i$ und betrachte den endlich erzeugten R-Modul $M_d := \sum_{i=0}^{d-1} Rx^i$, d.h den R-Modul der Polynome vom Grad $< d$.
Korollar 8.3$\Rightarrow$ M_d ist noethersch, also ist $M_d \cap I \leq M_d$ endlich erzeugt.
Seien $g_1, \ldots, g_m \in I$ Erzeuger davon.

Behauptung: $I =< f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m >$

Beweis. $\supseteq$ ist klar.
Sei nun $f \in I$. Wenn $\deg f < d$, dann ist $f \in< g_1, \dots, g_m >$. O.E. gilt also $\deg(f) =: k+1 \geq d$. Wir argumentieren per Induktion über k. Wir multiplizieren f_i mit einer geeigneten Potenz x^{l_i} und bekommen $f_i' \in I$ mit $\deg(f_i') = k+1$ (so dass f_i' und f_i den gleichen Leitkoeffizient haben). Sei $f' = \sum_{i=1}^n r_i f_i'$, so dass f' und f den gleichen Leitkoeffizient haben. Also ist $\deg(f - f') \leq k$ und per Induktionsannahme gilt $f - f' \in< f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m >$. Da aber $f' \in< f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m >$ ist, bekommen wir nun $f \in< f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m >$ □

□

Per Induktion nach n bekommen wir nun:

Korollar 8.4
R noethersch$\Rightarrow R[x_1, \dots, x_n]$ noethersch.

Erinnerung: Sei $R \subseteq S$ eine Ringenerweiterung und $Y \subseteq S$ eine Untermenge. Dann ist $R[Y]$ unsere Notation für den kleinsten Unterring von S, der $R \bigcup Y$ enthält.
Wenn $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ endlich ist, dann schreiben wir dafür $R[y_1, \dots, y_n]$.
Der Evaluation-Homomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} ev_y & R[x_1, \dots, x_n] & \rightarrow & R[y_1, \dots, y_n] \\ & f(x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f(y_1, \dots, y_n) \end{array}$$

ist surjektiv, also gilt $R[y_1, \dots, y_n] \cong R[x_1, \dots, x_n]/ker(ev_y)$ (ein Faktorring von Polynomring), d.h $R[y_1, \dots, y_n]$ besteht aus Polynomen in $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Beispiel 8.1
Sei $R = K$ ein Körper, $S = L$ eine Körpererweiterung von K. Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K. Dann hat $ev_\alpha : K[x] \to K[\alpha]$ einen nicht-tivialen Kern, $\ker(ev_\alpha) =< \text{MinPol}_K(\alpha) >$, also ist $K[\alpha] \cong K[x]/\ker(ev_\alpha)$ mit $\ker(ev_\alpha)$ maximales Ideal. Wir sehen also: $K[\alpha]$ ist bereits ein Körper, und damit gilt $K[\alpha] = K(\alpha)$.

Korollar 8.5
Sei R noethersch, $S = R[a_1, \dots, a_n]$ eine Ringererweiterung. Dann ist S noethersch.

Beweis. $R[a_1, \dots, a_n] \cong R[x_1, \dots, x_n]/\ker(ev_{\bar{a}})$. Nun Korollar 8.4 und Lemma 8.1 anwenden. □

Kapitel 3: Ganzheit

Definition 8.1
Sei $R \subseteq S$ Ringererweiterung

a) $\alpha \in S$ ist ganz über R $\Leftrightarrow \exists f \in R[x]$ normiert mit $f(\alpha) = 0$.

b) $R \subseteq S$ ist eine ganze Ringererweiterung $\Leftrightarrow$ jedes $\alpha \in S$ ist ganz über R.

Für die weitere Untersuchung brauchen wir (vgl. Skript Lineare Algebra II; Satz 11.13):

Erinnerung (Cramer's Formel)**:** Seien $d_1, \ldots, d_n \in R$, C eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen in R, $C = (c_{ij})$, und sei C_j die Matrix, die man bekommt, nachdem wir die j-te Spalte von C durch $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ ersetzen. Sei $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eine Lösung für $CX = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$.

Es gilt:

$$\det(C)x_j = \det(C_j) \forall j$$