B4: Algebra II
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

9.Vorlesung

11. Mai 2021

In diesem Skript untersuchen wir ganze Ringerweiterungen und den ganzen Abschluß. Wir beenden den Abschnitt mit dem wichtigem Satz 9.5. Im letztem Abschnitt studieren wir ganz abgeschlossene Integritätsbereiche und ihre Eigenschaften. Diese Begriffe werden wir in Kapitel 4 dieser Vorlesung, sowie allgemeiner in der Vorlesung algebraische Zahlentheorie benötigen.

Proposition 9.1
Seien R, S integritätsbereiche, $R \subseteq S$ und $\alpha \in S$. Es gilt: α ist genau dann ganz über R, wenn es einen endlich erzeugten R-Untermodul $M \neq 0$ von S gibt, so dass $\alpha M \subseteq M$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei $\alpha^n + r_1\alpha^{n-1} + \cdots + r_n = 0$, $r_i \in R$. Wir können $M = R[\alpha]$ nehmen, i.e.:

Behauptung: $\mathrm{Span}_R\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\} := M$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Beweis. Wir haben: $\alpha^n \in \sum_{i=0}^{n-1} R\alpha^i$. Sei $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \in M$, berechne:

$$\alpha(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) = \alpha a_0 + a_1\alpha^2 + \cdots + a_{n-2}\alpha^{n-1} + a_{n-1}\underbrace{\alpha^n}_{\in M} \in M\,.$$

□

„$\Leftarrow$“
Sei nun $M \neq 0$ endlich erzeugt mit $\alpha M \subseteq M$ und $v_1, \ldots, v_n \in S$ Erzeuger für M. Für alle i gilt $\alpha v_i = \sum a_{ij}v_j$ für geeignete $a_{ij} \in R$. Umschreiben ergibt ein Gleichungssytem:

$$\begin{aligned}(\alpha - a_{11})v_1 - a_{12}v_2 - \cdots &= 0\\ -a_{21}v_1 + (\alpha - a_{22})v_2 - \cdots &= 0\\ &\vdots\\ \cdots &= 0\end{aligned}$$

Sei C die Koeffizienten-Matrix. Cramers Formel ergibt für $C\underline{v} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$:

$$\det(C)v_j = \det(C_j) = 0$$

Nun gibt es mindestens ein j gibt mit $v_j \neq 0$ (weil $0 \neq M$). Außerdem sind $v_j \in S$ und $\det(C) \in S$ und S ist ein integritätsbereich. Es folgt: $\det(C) = 0$.
Das Berechnen dieser Determinante ergibt schließlich eine Gleichung
$\alpha^n + c\alpha^{n-1} + \cdots + c_n = 0\,, c_i \in R$ (ÜA).

□

Definition 9.1
Seien R, S integritätsbereiche, $R \subseteq S$. Der ganze Abschluss von R in S ist

$$\overline{R}^S := \{\alpha \in S \mid \alpha \text{ ist ganz über } R\}\,.$$

Korollar 9.2
Seien $R \subseteq S$ Erweiterung von Integritätsbereichen. Der ganze Abschluss $\overline{R}^S$ von R in S ist ein Unterring von S (der R enthält).

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in S$ ganz über R, $0 \neq M$, $0 \neq N$ endlich erzeugte R-Untermoduln von S, so dass $\alpha M \subseteq M$ und $\beta N \subseteq N$. Definiere $MN := \{\sum m_i n_i \mid m_i \in M, n_i \in N\}$.
Es ist:

(a) $MN \neq 0$ ist R-Untermodul von S

(b) MN ist endlich erzeugt: wenn $\{e_1, \ldots, e_m\}$ M erzeugt und $\{f_1, \ldots, f_n\}$ N erzeugt, dann erzeugt $\{e_i f_j \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ eben MN.

(c) MN ist abgeschlossen unter multiplikation durch $\alpha\beta$ und $\alpha \pm \beta$. Das heißt:

$$(\alpha\beta)MN \subseteq MN \text{ und } (\alpha \pm \beta)MN \subseteq MN$$

(ÜA).

Anwendung von Proposition 9.1 ergibt: $\alpha\beta$ und $\alpha \pm \beta$ sind ganz über R. □

Korollar 9.3
Seien $R \subseteq S$ Integritätsbereiche. Es gilt: S endlich erzeugt als R-Modul$\Rightarrow$ S ist ganz über R.

Beweis. Folgt aus Proposition 9.1 □

Unser nächses Ziel ist Satz 9.5 zu beweisen, brauchen wir noch diese:

Proposition 9.4
Sei R ein Integritätsbereich, $K := \operatorname{Quot}(R)$, L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K. Dann gibt es $d \in R$ mit $d\alpha$ ganz über R.

Beweis. α erfüllt

$$(*) \qquad \alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

mit $a_i \in K = \operatorname{Quot}(R)$. Sei $d \in R$, so dass $\forall i, da_i \in R$. Multiplizieren von $(*)$ mit d^m ergibt

$$d^m\alpha^m + a_1 d^m \alpha^{m-1} + \cdots + a_m d^m = 0$$

d.h

$$(d\alpha)^m + (a_1 d)(d\alpha)^{m-1} + \cdots + a_m d^m = 0\,.$$

□

Satz 9.5
Sei R ein Integritätsbereich, $K := \operatorname{Quot}(R)$, L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\overline{R}^L$ der ganze Abschluss von R in L. Es gilt: $L = \operatorname{Quot}(\overline{R}^L)$.

Beweis. Sei $\alpha \in L$, Proposition 9.4 $\Rightarrow$ α lässt sich schreiben als $\alpha = \frac{d\alpha}{d}$, $d \in R, d\alpha \in \overline{R}^L$, das heißt $\alpha \in \operatorname{Quot}(\bar{R}^L)$, also $\operatorname{Quot}(\bar{R}^L) \supseteq L$. Da die Inklusion $\operatorname{Quot}(\bar{R}^L) \subseteq L$ offensichtlich ist (ÜA), ist der Satz bewiesen. □

§Ganz abgeschlossene Integritätsbereiche

Definition 9.2
Ein Integritätsbereich R ist ganz abgeschlossen $\Leftrightarrow \overline{R}^K = R$, wobei $K := \mathrm{Quot}(R)$

Beispiel 9.1
Faktorielle Integritätsbereiche sind ganz abgeschlossen (ÜB).

Proposition 9.6
Sei R ein Integritätsbereich, $K = \mathrm{Quot}(R)$ und L/K eine algebraische Körpererweiterung. Wir nehmen an, dass R ganz abgeschlossen ist. Es gilt : $\alpha \in L$ ist ganz über $R \Leftrightarrow \mathrm{MinPol}_K(\alpha) \in R[x]$

Beweis. „$\Leftarrow$“:✓
„$\Rightarrow$“: Sei $\alpha \in L$ und $a_i \in R$, so dass

$$(*) \qquad \alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

Setze $f(x) = \mathrm{MinPol}_K(\alpha) \in K[x]$. Wir arbeiten in einem Zerfällungskörper für f und beweisen nun dass alle Nullstellen von $f(x)$ ganz über R sind:

Beweis. Sei α' eine Nullstelle, dann gibt es eine Isomorphie: $K(\alpha) \underset{\sim}{\xrightarrow{\sigma}} K(\alpha')$ mit $\sigma_{|K} = \mathrm{Id}$ und $\alpha \mapsto \alpha'$. Anwendung von σ auf $(*)$ ergibt nun: $(\alpha')^m + a_1(\alpha')^{m-1} + \cdots + a_m = 0$. □

Nun sind die Koeffizienten von $f(x)$ *elementare symmetrische Polynome in den Nullstellen* von $f(x)$ (ÜB). Da die Menge aller ganzen Elementen ein Teilring ist, folgt dass alle Koeffizienten von $f(x)$ ganz über R sind. Diese Koeffiziente sind andererseits in K. Da R ganz abgeschlossen ist folgt nun: alle Koeffiziente von f sind $\in R$. □

Unser nächstes Ziel ist die *Transitivität von Ganzheit* zu zeigen. Für den Beweis brauchen wir:

Lemma 9.7
Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Ringerweiterungen. Aus B endlich erzeugt als A-Modul und C endlich erzeugt als B-Modul folgt C endlich erzeugt als A-Modul.

Beweis. Seien $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ erzeugend für B als A-Modul und $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ erzeugend für C als B-Modul. Dann ist $\{\beta_i\gamma_j\}$ erzeugend für C als A-Modul (ÜA). □