B4: Algebra II
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

10.Vorlesung

18. Mai 2021

In diesem Skript werden wir zunächst Ganzheit weiter untersuchen und dann Kapitel 3 mit einer Diskussion über Ganzheit und Lokalisierung beenden. Danach werden wir unser letztes Kapitel (Kapitel 4) beginnen.

Wir betrachten stets kommutative Ringe mit Eins.

Für den Beweis von Proposition 10.2 brauchen wir noch:

Lemma 10.1
Sei $B = A[\beta_1, \dots, \beta_m]$ eine Ringerweiterung, wobei β_j ganz über A ist $\forall j = 1, \dots, m$. Dann ist B endlich erzeugt als A-Modul, und ganz über A.

Beweis. Beweis per Induktion nach m.

• Induktionsanfang: $m = 1$
Setze $\beta := \beta_1$, wobei β ganz über A ist. Da $B = A[\beta]$ ist B ganz über A wegen Korollar 9.3. Wir zeigen daß B endlich erzeugt als A-Modul ist. Seien $n \in \mathbb{N}$, und $a_i \in A$; $i = 1, \cdots, n$, so daß $\beta^n + \cdots + a_n = 0$

Behauptung: $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}$ erzeugen B als A-Modul.

Beweis. In der Tat, sei $b \in A[\beta]$ beliebig, d.h. es gibt $N \in \mathbb{N}$ und $c_i \in A$; $i = 1, \cdots, N$ so daß

$$(*) \qquad b = c_0 + c_1\beta + \cdots + c_N\beta^N$$

Da $\beta^n \in \sum_{i=0}^{n-1} A\beta^i$, kann man b umschreiben, indem man $c_N\beta^N$ als A-lineare Kombination der $1, \dots, \beta^{n-1}$ schreibt und in $(*)$ ersetzt. □

• Induktionsschritt: schreibe $B = A[\beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m] = \underbrace{A[\beta_1, \dots, \beta_{m-1}]}_{:=D}[\beta_m]$

D ist endlich erzeugt als A-Modul per Induktionsannahme und $B = D[\beta_m]$. Da β_m (a fortiori) auch ganz über D ist, ist B endlich erzeugt als D-Modul per Induktionsanfang.
Also sind $A \subseteq D \subseteq B$ wie in Lemma 9.7 und damit ist B endlich erzeugt als A-Modul. Außerdem gilt auch daß B ganz über A ist (wegen Korollar 9.3). □

Proposition 10.2 (Transitivität von Ganzheit)
Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Integritätsbereiche. Wenn B ganz über A und C ganz über B sind, dann ist C ganz über A.

Beweis. Seien $\gamma \in C$ und $b_i \in B$, so daß $\gamma^n + b_1\gamma^{n-1} + \cdots + b_n = 0$
Setze $B' := A[b_1, \dots, b_n]$. Da die b_i ganz über A sind, ist B' endlich erzeugt als A-Modul (s. Lemma 10.1). Nun ist γ bereits ganz über B' (Wahl der b_i), also ist $B'[\gamma]$ endlich erzeugt als B'-Modul (s. Lemma 10.1). Also ist $B'[\gamma]$ endlich erzeugt als A-Modul (s. Lemma 9.7). Damit ist γ ganz über A (wegen Korollar 9.3). □

Korollar 10.3
Sei $R \subseteq S$ Ringerweiterung. Es ist: $\overline{R}^S$ ist ganz abgeschlossen in S.

Beweis. Es ist: $R \subseteq \overline{R}^S \subseteq S$. Sei $\gamma \in S$ ganz über $\overline{R}^S$, also haben wir

$$R \underset{\text{ganz}}{\subseteq} \overline{R}^S \underset{\text{ganz (wegen Lemma 10.1)}}{\subseteq} \overline{R}^S[\gamma]\,.$$

Damit gilt nach Proposition 10.2 daß auch $R \underset{\text{ganz}}{\subseteq} \overline{R}^S[\gamma]$. Somit ist $\gamma \in \overline{R}^S$. □

Korollar 10.4
Sei $R \subseteq K$, K Körper. Dann ist $\overline{R}^K$ ganz abgeschlossen.

Beweis. $\overline{R}^K \subseteq \mathrm{Quot}(\overline{R}^K) \subseteq K$ und $\overline{R}^K$ ist ganz abgeschlossen in K (Korollar 10.3), also ist (a fortiori) $\overline{R}^K$ ganz abgeschlossen in der Zwischenerweiterung $\mathrm{Quot}(\overline{R}^K)$. □

Lokalisierung und Ganzheit

Für eine Erinnerung an Lokalisierung siehe Skript 3 und 4 der Algebra 1 (B3) Vorlesung. Sei R stets ein kommutativer Ring mit Eins.

Notation (Erinnerung) i) Wir bezeichnen $\mathrm{Spec}(R) :=$ Menge aller Primideale von R.

ii) Für $\mathfrak{p} \lhd R$ Primideal, ist $R_\mathfrak{p} := \{\frac{r}{d} \mid r \in R, d \notin \mathfrak{p}\}$ die <u>Lokalisierung</u> von R nach $\mathfrak{p}$.

iii) R ist <u>lokal</u>, wenn R nur ein maximales Ideal besitzt.

Die Beweise von Lemma 10.5, Proposition 10.6 und Proposition 10.7 sind ÜA.

Lemma 10.5
R ist lokal $\Leftrightarrow$ $R \backslash R^\times$ ist ein Ideal.

Beweis. siehe ÜB. □

Proposition 10.6
Sei $I \lhd R$ und $D \subseteq R$ multiplikativ mit $0 \notin D$.

a) Setze $I^e := D^{-1}RI$ das von I in $D^{-1}R$ erzeugte Ideal. Es gilt: $I^e = \{\frac{a}{d} \mid a \in I, d \in D\}$.

b) Sei nun $I \lhd D^{-1}R$. Betrachte das Ideal $I^c := I \cap R \lhd R$. Es gelten

   (i) $I \lhd D^{-1}R \Rightarrow I^{ce} = I$

   (ii) $I \lhd R$ prim und $I \cap D = \varnothing \Rightarrow I^{ec} = I$

c) Die Abbildung $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^e$ definiert eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : p \cap D = \varnothing\} \text{ und } \mathrm{Spec}(D^{-1}R)\,.$$

d) Sei $\mathfrak{p} \lhd R$ prim. Die Abbildung $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ definiert eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen

$$\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} \text{ und } \mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})\,.$$

e) Insbesondere besitzt $R_\mathfrak{p}$ nur ein maximales Ideal, nämlich $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

Beweis. ÜA. Siehe Aufgabe 3.4* in ÜB 3 der Algebra 1 Vorlesung (B3) im WiSe 2020/2021. □

Proposition 10.7
Sei $D \subseteq R$ multiplikativ mit $0 \notin D$

(i) R noethersch $\Rightarrow D^{-1}R$ noethersch.

(ii) R ganz abgeschlossen$\Rightarrow$ $D^{-1}R$ ganz abgeschlossen.

(iii) $R \subseteq R'$ ganze Erweiterung$\Rightarrow$ $D^{-1}R \subseteq D^{-1}R'$ ganze Erweiterung.

Beweis. siehe ÜB. □

Kapitel 4: Dedekindringe

In diesem Kapitel werden wir Dedekindringe einführen und charakterisieren. Ein Hauptziel von diesem Kapitel ist zu zeigen daß wenn R ein Dedekindring ist mit Quotientenkörper K und L/K eine endlich separable Erweiterung ist, dann ist $\overline{R}^L$ ein Dedekindring. Ein weiteres Ziel ist gebrochene Ideale und die Klassengruppe von R einzuführen. Diese Resultate werden wir in der Vorlesung algebraische Zahlentheorie unbedingt benotigen.

Wir betrachten stets kommutative Ringe mit Eins.

Notation (Erinnerung)
Seien $I, J \lhd R$, dann ist das Idealprodukt $IJ := \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_j \mid x_i \in I, y_j \in J, n \in \mathbb{N}\} \lhd R$.

Beispiel 10.1
Wenn $I =< x >$ und $J =< y >$, dann ist $IJ =< xy >$.

Definition 10.1
Ein Ring R ist ein Dedekindring, wenn R ein Integritätsbereich ist und jedes Ideal ein (endliches) Produkt von Primidealen ist.

Beispiel 10.2 (i) Sei R faktoriell. Dann ist jedes Hauptideal ein (endliches) Produkt von Primidealen. Insbesondere ist jeder Hauptidealring ein Dedekindring. Wir werden später die Umkehrung zeigen.

(ii) R Dedekindring und $0 \neq S \subseteq R$ multiplikativ $\Rightarrow S^{-1}R$ Dedekindring. Folgt aus Proposition 10.6 und 10.7 (ÜA). Wir werden einen anderen Beweis später liefern.