# B4: Algebra II
# Sommersemester 2021
# Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## 12.Vorlesung

25. Mai 2021

*Unser Hauptsatz in diesem Skript ist Satz 12.4. Danach beweisen wir mehrere Lemmata, die wir für die Charakterisierung von Dedekindringe im Skript 13 brauchen.*

Sei $R$ stets ein kommutativer integer Ring mit Eins.

**Korollar 12.1**
Sei $R$ ein Dedekindring, dann ist die Faktorisierung von Idealen (als Produkt von Primidealen) eindeutig.

*Beweis.* Folgt unmittelbar aus Lemma 11.5 und Satz 11.6 □

**Korollar 12.2**
Sei $R$ ein Dedekindring. Jedes $\neq 0$ gebrochenes Ideal ist invertierbar.

*Beweis.* Jedes (ganzes) Ideal $\neq 0$ ist Produkt von (invertierbaren) Primidealen, also ist jedes $\neq 0$ (ganzes) Ideal invertierbar und damit (Lemma 11.2) ist auch jedes gebrochenes Ideal $\neq 0$ invertierbar. □

Für den Beweis vom Satz 12.4 brauchen wir ein

**Lemma 12.3**
Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{m}$ Ideale in $R$ so daß $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist und $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Dann:

(i) $\exists z \in \mathfrak{m}$, so daß $(1-z)\mathfrak{a} = 0$ .

(ii) Es folgt: Wenn $R$ ein Integritätsbereich ist, $1 \notin \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a} \neq 0$ , dann ist $\mathfrak{m}\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$ .

*Beweis.* (i) Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erzeugend für $\mathfrak{a}$. Für jedes $i = 1, \cdots, n$, setze $\mathfrak{a}_i := < x_i, \ldots, x_n >$ (das von $\{x_i, \ldots, x_n\}$ erzeugte Ideal). Also ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$. Setze $\mathfrak{a}_{n+1} = \{0\}$.

Wir zeigen (per Induktion) daß:

$$\forall i = 1, \cdots, n+1 \; \exists z_i \in \mathfrak{m} \text{ so daß } (1-z_i)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_i \qquad (\dagger)$$

- Für $i = 1$ setze $z_1 = 0$.
- Aus $(1-z_i)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}$ folgt $(1-z_i)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}_i$ . Insbesondere gilt

$$(1-z_i)x_i = \sum_{j=i}^{n} z_{ij} x_j \text{ für geeignete } z_{ij} \in \mathfrak{m} \qquad (*)$$

Also ist

$$(1 - z_i - z_{ii})x_i \in \mathfrak{a}_{i+1} \qquad (**)$$

Per Definition von $\mathfrak{a}_{i+1}$ ist außerdem $(1 - z_i - z_{ii})x_j \in \mathfrak{a}_{i+1}$ für alle $j = i+1, \cdots, n$ .

Setze:

$$1 - z_{i+1} := (1 - z_i)(1 - z_i - z_{ii}) \qquad (***)$$

Aus (*) (**) und (***) folgt nun daß $(1 - z_{i+1})\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$.

- Wir haben (†) bewiesen. Nun ist $z := z_{n+1}$ das gesuchte Element.

(ii) ÜA.

□

**Satz 12.4**
Sei $R$ ein Integritätsbereich. Es ist:
$R$ ist ein Dedekindring$\Leftrightarrow$ jedes Ideal $\neq 0$ in $R$ ist invertierbar.

*Beweis.* "$\Rightarrow$" folgt aus Korollar 12.2.
"$\Leftarrow$" Lemma 11.3 impliziert, daß $R$ noethersch ist (jedes Ideal ist endlich erzeugt). Wir zeigen nun: jedes echtes Ideal ist Produkt von maximalen Idealen (insbesondere ist $R$ ein Dedekindring). Sonst ist die Menge der echten Idealen, die kein solches Produkt sind, nicht leer. Sei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein maximales Element davon ($\mathfrak{a}$ existiert, weil $R$ noethersch ist). Da $\mathfrak{a}$ kein maximales Ideal ist, ist $\mathfrak{a}$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ strikt enthalten. Betrachte nun das (gebrochene) Ideal $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$.

**Behauptung 1:** $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$ ist ein ganzes Ideal.

*Beweis.* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} \subseteq R$. Bemerke nun: wenn $I$ ein gebrochenes Ideal ist und $I \subseteq R$, ist dann $I \lhd R$. □

**Behauptung 2:** $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{a}$

*Beweis.* Es ist klar, daß $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ; das ist aber wegen Lemma 12.3(ii) unmöglich. □

Es folgt: $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$ ist ein Produkt von maximalen Idealen (folgt aus der Wahl von $\mathfrak{a}$), und damit ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a})$ auch solch ein Produkt: Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{a}$.

□

Wir beweisen nun die Hilfslemmata für noethersche Ringe.

**Hilfslemma 12.1**
Ein gebrochenes ideal von einem noetherschen Integritätsbereich $R$ ist ein endlich erzeugter $R$-Modul.

*Beweis.* Setze $I = \frac{1}{d}I'$, wobei $d \in R, d \neq 0$ und $I' \lhd R$. $R$ noethersch $\Rightarrow$ $I'$ ist endlich erzeugt mit erzeugender Menge $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Dann ist offensichtlich $\{\frac{x_1}{d}, \ldots, \frac{x_r}{d}\}$ erzeugend für $I$. □

**Hilfslemma 12.2**
Ein $\neq 0$ ideal in einem noetherschen Ring enthält ein Produkt von $\neq 0$ Primidealen.

*Beweis.* Sonst ist die Menge der $\neq 0$ Ideale, die kein solches Produkt enthalten, nicht leer. Da $R$ noethersch ist, sei $0 \neq I$ ein maximales Mitglied davon. Da $I$ kein Primideal ist, gibt es Ideale $I_1, I_2$, so daß $I_1 I_2 \subseteq I$, aber $I_1 \supsetneq I$ und $I_2 \supsetneq I$ (z.B. $\exists a, b \in R$, so daß $ab \in I$, aber $a \notin I$ und $b \notin I$, setze $I_1 := I + Ra$ und $I_2 := I + Rb$).
Aus der Wahl von $I$ folgt: $I_1$ und $I_2$ enthalten ein Produkt von $\neq 0$ Primidealen, und somit enthält $I \supseteq I_1 I_2$ auch solch ein Produkt. Widerspruch zur Wahl von $I$. □

**Hilfslemma 12.3**
Sei $R$ ein ganz abgeschlossener noetherscher Integritätsbereich, $K = \operatorname{Quot}(R)$, $I \subseteq K$ ein gebrochenes Ideal von $R$; dann ist $S := \{x \in K \mid xI \subseteq I\} = R$

*Beweis.* Wegen Hilfslemma 12.1 ist $I$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Sei nun $x \in S$. Aus $xI \subseteq I$ und Proposition 9.1 folgt: $x$ ist ganz über $R$. Da $R$ ganz abgeschlossen ist folgt: $x \in R$. Also $S \subseteq R$. Da offensichtlich $R \subseteq S$, haben wir $R = S$. □

**Erinnerung:** Setze $I^* := (R : I) = \{x \in K \mid xI \subseteq R\}$. Allgemein gilt $I^* \supseteq R$ und $II^* \lhd R$. Ein gebrochenes Ideal $I$ ist invertierbar $\Leftrightarrow II^* = R$.

**Hilfslemma 12.4**
Sei $R$ ein noetherscher Integritätsbereich, so daß jedes $\neq 0$ Primideal ein Maximalideal ist. Sei $I \lhd R$. Dann ist $I^* \supsetneq R$.

*Beweis.* Wir zeigen $I^* \neq R$. Sei $a \neq 0, a \in I$, so daß $R \supseteq I \supseteq aR$. Hilfslemma 12.2 liefert $aR \supseteq \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m$, $\mathfrak{p}_i \neq 0$ Primideale; o.E. sei $m$ minimal. Sei $\mathfrak{p} \supseteq I$ Maximalideal, also $\mathfrak{p} \supseteq I \supseteq aR \supseteq \prod_{i=1}^m \mathfrak{p}_i$. Da beide $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_i$ Primideale sind, folgt aus unserer Annahme, daß $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ für geeignetes $i$ ($\mathfrak{p}$ Primideal und $\mathfrak{p} \supseteq \prod_i \mathfrak{p}_i \Rightarrow \exists i, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$, aber $\mathfrak{p}_i$ Maximalideal $\Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$).
Also ist o.E. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$.

• Wenn $m = 1$, dann ist $aR = I$ und $I^* = I^{-1} = a^{-1}R$, und da $I \subsetneq R$, ist $a^{-1} \notin R$, also $I^{-1} \supsetneq R$.

• Wenn $m > 1$: dann ist $aR \not\supseteq \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_m$ per Minimalität von $m$. Also wähle $b \in \prod_{i=2}^m \mathfrak{p}_i$, aber $b \notin aR$ und setze $c := a^{-1}b$. Dann ist $c \notin R$ und $cI \subseteq c\mathfrak{p} = a^{-1}b\mathfrak{p} \subseteq a^{-1}\mathfrak{p}\prod_{i=2}^m \mathfrak{p}_i \subseteq a^{-1}(aR) = R$. Wir haben gezeigt: $c \in I^*$, also $I^* \supsetneq R$. □

**Hilfslemma 12.5**
Sei $D$ ein Integritätsbereich, $k \subseteq D$ ein Unterkörper, so daß $D/k$ algebraisch ist. Dann ist $D$ ein Körper.

*Beweis.* Sei $0 \neq \beta \in D$. Da $\beta$ algebraisch über $k$ ist, ist $k[\beta]$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum. Die Abbildung $\begin{array}{ccc} k[\beta] & \to & k[\beta] \\ x & \mapsto & \beta x \end{array}$ ist linear und injektiv (weil $D$ ein Integritätsbereich ist), also folgt aus LA: Die Abbildung ist surjektiv. Insbesondere gibt es $\beta' \in k[\beta]$, so daß $\beta\beta' = 1 \in k[\beta]$ □