B4: Algebra II
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

13. Vorlesung

27. Mai 2021

In diesem Skript führen wir in Definition 13.1 die Klassengruppe (vgl. Korollar 12.2) und Klassenzahl von einem Dedekingring ein. Diese Begriffe werden wir in der nächster Vorlesung gleich gebrauchen. Wir beweisen außerdem weitere wichtige Sätze über Dedekindringe. Satz 13.1 ergibt eine allgemeine Charakterisierung für Dedekindringe (vgl. Satz 12.4), Satz 13.2 eine Charakterisierung für faktorielle Dedekindringe, und Satz 13.3 die eindeutige Faktorisierung für gebrochene Ideale in einem Dedekindring. Wir beenden das Skript (und damit die Vorlesung Algebra 2) mit Satz 13.5, den wir direkt in der nächster Vorlesung verwenden wollen.

Definition 13.1
Sei R ein Dedekindbereich. Die Menge $\mathrm{Id}(R)$ der $\neq 0$ gebrochenen Ideale von R (versehen mit der Verknüpfung *Idealprodukt*) ist eine abelsche Gruppe. Sie enthält die Untergruppe $H(R)$ der gebrochenen Hauptideale. Die Faktorgruppe $\mathcal{K}l(R) := \mathrm{Id}(R)/H(R)$ heißt die Ideal Klassengruppe von R. Ihre Ordnung $|\mathcal{K}l(R)| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt die Klassenzahl von R.

Satz 13.1
Sei R ein Integritätsbereich. Dann ist R ein Dedekindring genau dann, wenn R die folgende drei Bedingungen erfüllt:

1. R ist noethersch
2. Jedes echte Primideal ist maximal
3. R ist ganz abgeschlossen.

Beweis. „$\Rightarrow$“

1. folgt aus Korollar 12.2 und Lemma 11.3.
2. folgt aus Satz 11.6.
3. Setze $K :=$ Quot(R), sei $a \in K$ und $f(x) \in R[x]$ normiert mit $f(a) = 0$, $\deg(f) = n$. Schreibe $a = \frac{b}{c}$, $b, c \in R, c \neq 0$ und setze $M := R + Ra + \cdots + Ra^{n-1}$. Es ist $c^{n-1}M \subseteq R$ (und somit ist M ein gebrochenes Ideal), und $M^2 = M$ (ÜA). Da M gebrochenes Ideal, und R Dedekind ist, existiert M^{-1}. Also ist $M^{-1}M^2 = R$, d.h $M = R$. Da $a \in M$, gilt nun $a \in R$.

„$\Leftarrow$“ Wir zeigen 1.+2.+3.$\Rightarrow$ jedes $\neq 0$ gebrochenes Ideal ist invertierbar.

Sei also I ein gebrochenes Ideal.

Setze $I^* := (R : I)$, und prüfe daß (vgl. [Skript 12; Erinnerung s. 3]):

$$II^*(II^*)^* \subseteq R \text{ , also } I(I^*(II^*)^*) \subseteq R \text{ , also } I^*(II^*)^* \subseteq I^*$$

per Definition von I^* .

Setze $S := \{x \in K \mid xI^* \subseteq I^*\}$. Es ist: $S \subseteq R$ (siehe Hilfslemma 12.3). Wir bekommen also aufjedenfall daß :

$$(II^*)^* \subseteq S \subseteq R \qquad (\dagger)$$

- Wenn $II^* = R$ gilt, ist I invertierbar und wir sind fertig.
- Sonst ist $II^* \lhd R$, aber dann ist (Hilfslemma 12.4) $(II^*)^* \supsetneq R$: Widerspruch zum $(\dagger)$. □

Beispiel 13.1 (i) Ein Hauptidealring ist ein Dedekindring. Die Klassengruppe ist trivial und die Klassenzahl 1.

Folgt aus Proposition 5.12 in Skript 5 der Algebra 1 Vorlesung WiSe 2020/2021, und Beispiel 9.1 oder Aufgabe 5.1 ÜB 5 (ÜA).

(ii) R Dedekindring und $0 \neq S \subseteq R$ multiplikativ $\Rightarrow S^{-1}R$ Dedekindring. Folgt aus Proposition 10.6 und 10.7 (ÜA).

(iii) $\mathbb{Q}[x, y]$ ist faktoriell, ist jedoch kein Dedekindring, da das Ideal $< x >$ prim aber nicht maximal ist (ÜA).

Satz 13.2
Sei R ein Dedekindbereich, R ist genau dann faktoriell, wenn er ein Hauptidealbereich ist. Das heißt: Ein Dedekindbereich ist genau dann faktoriell, wenn $|\mathcal{K}l(R)| = 1$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ Jedes Hauptidealbereich ist faktoriell.
„$\Rightarrow$“ Sei nun R faktoriell; es genügt zu zeigen, daß jedes $\neq 0$ Primideal $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist (da jedes Ideal ein Produkt von Primidealen ist, und das Produkt von Hauptidealen ein Hauptideal ist). Sei $0 \neq a \in \mathfrak{p}$; dann ist a ein Produkt von irreduziblen Elementen. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, enthält $\mathfrak{p}$ ein Primfaktor π von a. Nun folgt aus $\mathfrak{p} \supseteq < \pi >$, daß $\mathfrak{p} = < \pi >$, weil $< \pi >$ ein Primideal, also ein Maximalideal ist (Satz 11.6). □

Satz 13.3 (Gebrochene Ideale in einem Dedekindbereich)
Sei R ein Dedekindbereich. Jedes $\neq 0$ gebrochenes Ideal hat eine eindeutige Faktorisierung als Produkt von ganzen Potenzen von Primidealen.

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein gebrochenes Ideal und $d \neq 0$, $d \in R$, so daß $d\mathfrak{a} \lhd R$. Schreibe eindeutig (Korollar 12.1)

$$d\mathfrak{a} = p_1^{r_1} \dots p_m^{r_m} \qquad \text{wobei die } p_i \text{ Primideale sind und } r_i \in \mathbb{N}_0$$

und

$$< d > = p_1^{s_1} \dots p_m^{s_m}, \qquad \text{wobei } s_i \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Dann ist

$$\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i - s_i}, \qquad \text{wobei } r_i - s_i \in \mathbb{Z} \,.$$

□

Für den Beweis vom Satz 13.5 brauchen wir den Satz 13.4. Wir werden allerdings diesen Satz erst in der Folgevorlesung beweisen können.

Satz 13.4
Sei R ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, $K = \mathrm{Quot}(R)$, L/K eine endliche separable Erweiterung, $n = [L : K]$ und $S = \overline{R}^L$. Dann gibt es $M \subseteq L, M' \subseteq L$ R-Untermoduln von L, beide frei von Dimension n, so daß $M \subseteq S \subseteq M'$.

Satz 13.5
Sei R ein Dedekindbereich, $K =$ Quot(R), L/K eine endliche separable Erweiterung. Dann ist $\overline{R}^L$ ein Dedekindbereich.

Beweis. Wir zeigen, daß $\overline{R}^L$ 1. + 2. + 3. von Satz 13.1 erfüllt.

1. $\overline{R}^L$ ist noethersch:

   Satz 13.4 $\Rightarrow M \subseteq \overline{R}^L \subseteq M'$, also ist $\overline{R}^L$ in einem endlich erzeugten R-Modul M' enthalten, und da R noethersch ist, folgt (aus Korollar 8.3), daß M' ein noetherscher R-Modul ist. D.h.: $\overline{R}^L$ ist ein Untermodul eines noetherschen R-Modul. Es folgt: jedes Ideal in $\overline{R}^L$ ist endlich erzeugt als R-Modul (und a fortiori als $\overline{R}^L$-Modul), d.h.: $\overline{R}^L$ ist noethersch.

3. $\overline{R}^L$ ist ganz abgeschlossen: Korollar 10.4

2. Jedes $\neq 0$ Primideal von $\overline{R}^L$ ist ein Maximalideal:

   Sei $0 \neq \mathfrak{q}$ ein Primideal, $\beta \neq 0$, $\beta \in \mathfrak{q}$, β ganz über R. Es existiert $a_i \in R$, so daß $\beta^n + a_1\beta^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit n minimal, $a_n \neq 0, a_n \in \beta\overline{R}^L \cap R$, so daß $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R \neq \{0\}$ Primideal in R, also ist $\mathfrak{p}$ ein Maximalideal in R, also ist $R/\mathfrak{p}$ ein Körper. Nun ist $\overline{R}^L/\mathfrak{q}$ ein Integritätsbereich und die Einbettung

   $$\begin{array}{ccc} R/\mathfrak{p} & \hookrightarrow & \overline{R}^L/\mathfrak{q} \\ a+\mathfrak{p} & \mapsto & a+\mathfrak{q} \end{array}$$

   liefert: $R/\mathfrak{p}$ ist isomorph zu einem Unterkörper von $\overline{R}^L/\mathfrak{q}$. Außerdem ist $\overline{R}^L/\mathfrak{q}$ algebraisch über $R/\mathfrak{p}$ (weil $\overline{R}^L$ ganz über R ist). Es folgt nun aus dem Hilfslemma 12.5, daß $\overline{R}^L/\mathfrak{q}$ ein Körper ist. Es folgt: $\mathfrak{q}$ ist maximal.

$\square$