B4: Algebraische Zahlentheorie
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

14.Vorlesung

8. Juni 2021

Wir werden in diesem Skript die gleiche Notationen, Definitionen, Begriffe und Terminologie (von Skript B1, B2, B3, B4; Algebra II) implizit und stillschweigend beibehalten und verwenden. In dieser Vorlesung B4; Algebraische Zahlentheorie werden wir die Ergebnisse der Algebra II auf Zahlkörper L und deren Ringe $\mathcal{O}_L$ (ganze algebraisch Zahlen) anwenden. Wir werden zunächst ***Norm, Spur, Diskriminante*** *studieren, um die Theorie der Körpererweiterungen und unseren Werkzeugkasten zu ergänzen. Danach werden wir* ***Gitter*** *in* $\mathbb{R}^n$ *und* Idealnorm *einführen um* die Endlichkeit der Klassenzahl *zu etablieren. Im letztem Kapitel werden wir die* Gruppe der Einheiten $\mathcal{O}_L^\times$ *studieren und* ***Dirichlet's Einheitensatz*** *beweisen.*

In Skript 14 führen wir die Norm und die Spur ein, und fangen damit an ihre Eigenschaften zu studieren. Dafür erinnern wir kurz an gewählte und benötigte Begriffe und Ergebnisse der LA I und LA II.

Kapitel 5: Norm, Spur, Diskriminante

Sei L/K stets eine endliche Körpererweiterung (das heißt $\dim_K L < \infty$).

Erinnerung aus LA I und LA II:

- Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_K(L,L)$ den K-Vektorraum

$$\mathcal{L}_K(L,L) := \{\mu \, : \, L \longrightarrow L \, ; \, \mu \text{ ist eine } K- \text{ lineare Abbildung } \}$$

- Für $\mu \in \mathcal{L}_K(L,L)$ bezeichnet Spur(μ) die Spur (Trace) von μ :

  für M eine Matrix Darstellung von μ, ist Spur(μ) := Spur(M) := die Summe der Einträge M_{ii} der Hauptdiagonale von M.

Definition und Notation
Sei $\alpha \in L$. Betrachte die Abbildung

$$\mu_{\alpha,L} : \begin{array}{ccc} L & \rightarrow & L \\ x & \mapsto & \alpha x \end{array}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich K-linear, das heißt $\mu_{\alpha,L} \in \mathcal{L}_K(L,L)$. Wir bezeichnen:

- $\chi_{\alpha,L} :=$ CharPol von $\mu_{\alpha,L}$
- $f_{\alpha,L} :=$ MinPol von $\mu_{\alpha,L}$
- $N_{L/K}(\alpha) := \det(\mu_{\alpha,L}) \in K$.

  $N_{L/K}(\alpha)$ heißt die $\underline{(L/K)\text{-Norm von } \alpha}$.
- $Sp_{L/K}(\alpha) := \mathrm{Spur}(\mu_{\alpha,L}) \in K$.

  $Sp_{L/K}(\alpha)$ heißt die $\underline{(L/K)\text{-Spur von } \alpha}$.

Das folgende Lemma erklärt den Zusammenhang zum Minimalpolynom von $\alpha \in L$ über K:

Lemma 14.1
Es gelten:

(i) $f_{\alpha,L} =$ MinPol$_K(\alpha)$.

(ii) Für $L = K(\alpha)$ bezeichne $f_\alpha := f_{\alpha,K(\alpha)}$. Insbesondere gilt dann:

$$f_\alpha = \chi_{\alpha,K(\alpha)} = \ \mathrm{MinPol}_K(\alpha) \, .$$

(iii) Setze $m := [L : K(\alpha)]$. Dann gilt allgemeiner

$$\chi_{\alpha,L} = f_{\alpha,L}^m \, .$$

Beweis. (i) Es ist leicht zu prüfen, daß $f(\mu_{\alpha,L}) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) \ = \ 0 \,\forall f \in K[x]$.

Die Aussage von (i) folgt nun unmittelbar aus den Definitionen (ÜA).

(ii) Wir berechnen: $\deg \chi_{\alpha,K(\alpha)} = [K(\alpha) : K] = \deg \ \mathrm{MinPol}_K(\alpha) = \deg f_\alpha$.

Damit sind die Polynome gleich.

(iii) Sei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ eine Basis für $L/K(\alpha)$, also

$$(*) \qquad L = \bigoplus_{i=1}^{m} K(\alpha)\lambda_i$$

• Setze $W_i := K(\alpha)\lambda_i$. Die W_i sind $\mu_{\alpha,L}$-invariante K-Unterräume, und

$$(**) \qquad L = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i \text{ als } K\text{-Vektorraum} \, .$$

(ÜA).

• Betrachte nun die folgende Abbildungen:
$\mu_{\alpha,L} : L \to L$
$\mu_{\alpha,K(\alpha)} : K(\alpha) \to K(\alpha)$

und für jedes $i = 1, \cdots, m$ die K-Vektorräume Isomorphie: $\begin{array}{ccc} K(\alpha) & \overset{\omega_i}{\tilde{\to}} & W_i \\ x & \mapsto & x\lambda_i \end{array}$

- Für jedes $i = 1, \cdots, m$ erfüllt ω_i die folgende Gleichung auf $K(\alpha)$:

$$\omega_i \circ \mu_{\alpha,K(\alpha)} = \mu_{\alpha,L} \circ \omega_i \text{ auf } K(\alpha)\,.$$

Folgt per Definitionen (ÜA).

(Diese Gleichungen kann man zusammenfassen als: $\mu_{\alpha,L} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mu_{\alpha,K(\alpha)}$).

Außerdem gilt:

$(***)$ $$\underbrace{\mu_{\alpha,L} \restriction W_i = \omega_i \circ (\mu_{\alpha,K(\alpha)}) \circ \omega_i^{-1}}_{\textbf{ähnliche lineare Transformationen}}\,.$$

(ÜA)

Wegen $(**)$ und $(***)$ berechnen wir nun (siehe LA II), daß

$$\begin{aligned}
\chi_{\alpha,L} &= \mathrm{CharPol}(\mu_{\alpha,L}) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \mathrm{CharPol}(\mu_{\alpha,L} \restriction_{W_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \mathrm{CharPol}(\omega_i \circ \mu_{\alpha,K(\alpha)} \circ \omega_i^{-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \mathrm{CharPol}(\mu_{\alpha,K(\alpha)}) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \chi_{\alpha,K(\alpha)} \\
&\overset{(ii)}{=} \prod_{i=1}^{m} f_\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Wir werden nun weitere Eigenschaften von Norm und Spur untersuchen.

Lemma 14.2
Seien $\alpha, \beta \in L$, $\lambda \in K$ und $n = [L : K]$. Es gilt:

1. $N_{L/K}(\alpha\beta) = N_{L/K}(\alpha) N_{L/K}(\beta)$
2. $Sp_{L/K}(\lambda\alpha + \beta) = \lambda Sp_{L/K}(\alpha) + Sp_{L/K}(\beta)$
3. $N_{L/K}(\lambda) = \lambda^n$ und $Sp_{L/K}(\lambda) = n\lambda$
4. Sei $f_{\alpha,L} = x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + a_0, \quad a_i \in K$.

Also ist $\nu = [K(\alpha) : K] = \deg \mathrm{MinPol}_K(\alpha)$. Setze $\mu := [L : K(\alpha)] = \frac{n}{\nu}$. Es gilt:

(i) $N_{L/K}(\alpha) = (-1)^n a_0^\mu$

(ii) $Sp_{L/K}(\alpha) = -\mu a_{\nu-1}$

Lemma 14.2 beweisen wir im Skript 15. Dafür fassen wir zusammen benötigte **Erinnerungen als LA I und LA II:**

- Die Determinante ist multiplikativ.
- Die Spur ist additiv.
- Sei $A \in M_{n\times n}(K)$, setze $\mathrm{CharPol}(A) = \det(xI - A) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$. Es ist

$$b_0 = (-1)^n \det A \text{ und } b_{n-1} = -\mathrm{Spur}(A)\,.$$