B4: Algebraische Zahlentheorie
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

16.Vorlesung

15. Juni 2021

Im Korollar 16.1 werden wir die Norm und Spur für eine Zwischenerweiterung untersuchen. Danach werden wir Erinnerungen an Dualraum, und Bilineare Formen aus der LA I und LA II aufrufen. Diese Begriffe werden wir ebenfalls in die folgende Skripte stark benötigen, um den dritten Begriff des Kapitels, die Diskriminante, einzuführen. Im letztem Abschnitt werden wir eine besondere bilineare Form einführen.

Sei L/K stets eine endliche Körpererweiterung (das heißt $\dim_K L < \infty$).

Korollar 16.1
Sei L/K separabel, $[L : K] = n$, und $K \subseteq E \subseteq L$. Sei $\alpha \in L$. Dann gelten:

(i) $N_{L/K}(\alpha) = N_{E/K}(N_{L/E}(\alpha))$ und

(ii) $Sp_{L/K}(\alpha) = Sp_{E/K}(Sp_{L/E}(\alpha))$

Beweis. Wir argumentieren wie im Beweis vom Satz 15.3. und benutzen dabei ebenfalls die gleiche Bezeichnungen wie im Beweis vom Satz 15.3.

(i) Aus Satz 15.4 folgt:

$$N_{L/K}(\alpha) = \prod_{k=1}^{n} \sigma_k(\alpha)\,,$$

wobei $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ die Einbettungen von L/K in Ω sind.

• Sei nun β ein primitives Element für E/K, also $E = K(\beta)$ und setze $[K(\beta) : K] = m = \frac{n}{r}$ und $[L : K(\beta)] = r$. Aus $(*)$ und $(**)$ im Beweis vom Satz 15.3. wissen wir daß $\{\tilde{\mu}_j \circ \lambda_i \mid j = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, r\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$.

• Also $\forall k, \exists i, \exists j$, so daß $\sigma_k = \tilde{\mu}_j \circ \lambda_i$. Da alle vorkommene Abbildungen Homomorphismen sind, berechnen wir:

$$N_{L/K}(\alpha) = \prod_{i,j} (\tilde{\mu}_j \circ \lambda_i)(\alpha) \overset{\text{Hom}}{=} \prod_{j=1}^{m} \tilde{\mu}_j (\prod_{i=1}^{r} \lambda_i(\alpha))\,.$$

• Nun folgt ebenfalls aus Satz 15.4 daß:

$$\prod_{i=1}^{r} \lambda_i(\alpha) = N_{L/E}(\alpha)$$

(Anwendung für L/E und die r Einbettungen von L über E in Ω').

- Da aber per Definition $N_{L/E}(\alpha) \in E$ ist, folgt aus der Definition von $\tilde{\mu}$ daß

$$\tilde{\mu}_j(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i(\alpha)) = \mu_j(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i(\alpha)) \,.$$

- Eine nochmalige Anwendung vom Satz 15.4 ergibt schließlich daß:

$$N_{L/K}(\alpha) = \prod_{j=1}^{m} \mu_j(N_{L/E}(\alpha)) = N_{E/K}(N_{L/E}(\alpha))$$

(Anwendung für E/K und die m Einbettungen von E über K in Ω').

(ii) Analog (ÜA).

□

Erinnerung: Bilineare Formen.

1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K, $\dim_K V = n$ und $\mathcal{B} := \{v_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ eine K-Basis für V.

   Sei $B : V \times V \to K$ eine bilineare Form.

2. B ist symmetrisch$\Leftrightarrow B(x, y) = B(y, x) \forall x, y \in V$.

3. Die Matrix-Darstellung $\mathbb{B}$ von B bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist definiert durch: $\mathbb{B}_{ij} = B(v_i, v_j)$. Es gilt

$$\forall x, y \in V \ : \ [y]_{\mathcal{B}}^t \ \mathbb{B} \ [x]_{\mathcal{B}} = B(x, y) \,.$$

4. Sei $\mathbb{B}'$ die Darstellung von B bezüglich einer Basis $\{v_i' \mid i = 1, \ldots, n\}$ und P die Basiswechselmatrix. Es gilt: $\mathbb{B}' = P^t \mathbb{B} P$.

Definition 16.1
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und $\mathcal{B} := \{v_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ eine K-Basis für V, $\mathcal{B}^*$ die Dualbasis. Sei $B : V \times V \to K$ bilinear und symmetrisch. Für alle $x \in V$ definiere: $B_x : V \to K$ durch $B_x(y) := B(x, y)$ (oder $B_y : V \to K$ durch $B_y(x) = B(x, y)$).
B heißt nicht ausgeartet, wenn: $\forall x \in V, x \neq 0 \Rightarrow B_x \neq 0$.

Bemerkung 16.1 (i) $B_x \in V^*$

(ii) B nicht ausgeartet$\Leftrightarrow \det \mathbb{B} \neq 0$ für eine (alle) Matrixdarstellungen $\mathbb{B}$ von B.

(iii) B ist nicht ausgeartet $\Leftrightarrow$ Kern $\phi_B = \{0\}$ wobei ϕ_B ist die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \phi_B : & V & \to & V^* \\ & x & \mapsto & B_x \end{array}$$

(iv) Da $\dim V = \dim V^*$ gilt also:

B nicht ausgeartet$\Leftrightarrow$ ϕ_B ist eine Isomorphie

(v) Sei B nicht ausgeartet. Setze für jedes $i = 1, \ldots, n$

$$w_i := \phi_B^{-1}(v_i^*) \,.$$

Dann gilt $\forall i, j$:

$$B(v_i, w_j) = \delta_{ij} \,.$$

Diese Basis $\{w_i \mid i = 1, \dots, n\}$ von V heißt die zu $\mathcal{B}$ B-duale Basis für V. Die B-duale Basis hat die folgende nützliche Eigenschaft:

$$\forall v \in V \text{ mit } v = \sum c_i v_i \text{ ist } c_i = B(v, w_i)\,.$$

Beweis. ÜA. □

§Die Spur bilineare Form

Bemerkung 16.2
Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung.

(i) Die Abbildung

$$\begin{array}{rrcc} B_{L/K}: & L \times L & \to & K \\ & (x,y) & \mapsto & Sp_{L/K}(xy) \end{array}$$

definiert eine symmetrische bilineare Form.

(ii) $B_{L/K}$ ist nicht ausgeartet.

Beweis. (i) ÜA.

(ii) Setze $[L:K] = n$. Sei $\gamma \in L$, so daß $L := K(\gamma)$ (Satz vom Primitivelement). Dann ist $\{\gamma^0, \dots, \gamma^{n-1}\}$ eine K-Basis für L.

- Wir berechnen die Matrixdarstellung $\mathbb{B}$ der bilinearen Form $B_{L/K}$ bezüglich dieser Basis:

$$\forall i,j \;:\; \mathbb{B}_{ij} = Sp_{L/K}(\gamma^{i+j}) \underset{15.4}{\overset{\text{Satz}}{=}} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\gamma^{i+j}) \overset{\text{Hom}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\gamma)^{i+j}\,,$$

wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die n verschiedenen Einbettungen von L in Ω sind.

- Bezeichne $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ die n verschiedenen Nullstellen von $\mathrm{MinPol}_K(\gamma)$, also ist $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} = \{\sigma_1(\gamma), \dots, \sigma_n(\gamma)\}$. Wir schreiben um

$$\mathbb{B}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{i+j} \qquad (\dagger)$$

- Wir zeigen daß $\det \mathbb{B} \neq 0$. Aus $(\dagger)$ sehen wir, daß $\mathbb{B}$ das Produkt

$$\mathbb{B} = \mathcal{V}^t \mathcal{V}$$

wobei $\mathcal{V}$ die Vandermonde Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^0 & \cdots & \gamma_1^{n-1} \\ \gamma_2^0 & \cdots & \gamma_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_n^0 & \cdots & \gamma_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(ÜA).

Wir berechnen nun: $\det \mathbb{B} = (\det \mathcal{V})^2$. In LA II haben wir gezeigt, daß $\det \mathcal{V} \neq 0$. Also ist $\det \mathbb{B} \neq 0$ und somit ist gezeigt, daß $B_{L/K}$ nicht ausgeartet ist.

□