B4: Algebraische Zahlentheorie
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

25.Vorlesung

15. Juli 2021

In diesem Skript werden wir Satz 24.2 beweisen (damit ist die Endlichkeit der Klassenzahl vollständig bewiesen) und Kapitel 6 beenden. Danach werden wir unser letztes Kapitel 7 anfangen. Der Hauptsatz im Kapitel 7 ist der Dirichletsche Einheitssatz, womit die Struktur der Einheitengruppe $\mathcal{O}_L^\times$ als $\mathbb{Z}$-Modul erklärt wird.

Für den Beweis vom Satz 24.2, behalten wir den Ansatz und Notation vom Skript 24. Wir benutzen, oft stillschweigend, die Ergebnisse vom Skript 24.

Beweis. Die Beweisstrategie ist folgend. Wir wollen Satz 21.8 anwenden auf

$$\Gamma = \sigma(\mathfrak{a}) \text{ und } X_\tau \subseteq L_\mathbb{R} \,.$$

Wir werden uns nun darum bemühen, *ein geeignetes $\tau \in \mathbb{R}_+$ zu finden.*

• Aus Satz 21.8 folgt, für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{R}_+$, daß *wenn*

(1) $v(X_\tau) > 2^n v(T_{\sigma(\mathfrak{a})})$ *dann*

(2) $\exists \alpha \neq 0, \alpha \in \mathfrak{a}$, so daß $\sigma(\alpha) \in X_\tau$, das heißt so daß

$$(\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_s(\alpha), \sigma_{s+1}(\alpha), \ldots, \sigma_{s+t}(\alpha)) \in X_\tau$$

das heißt so daß

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{s} |\sigma_i(\alpha)| + 2\sum_{j=1}^{t} |\sigma_{s+j}(\alpha)| < \tau \,.$$

• Setze $a_j := |\sigma_j(\alpha)|$, $j = 1, \ldots, s$ und $a_{s+1} = a_{s+2} = |\sigma_{s+1}(\alpha)|$ und

$\vdots$

$\underbrace{a_{s+2t-1}}_{=a_{n-1}} = \underbrace{a_{s+2t}}_{a_n} = |\sigma_{s+t}(\alpha)|$

• $(*)$ bedeutet daß $\sum_{l=1}^n a_l < \tau$. Die AGU impliziert nun, daß

$$n(a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} < \tau \,, \text{ d.h. } \prod_{l=1}^{n} a_l < \frac{\tau^n}{n^n} \,.$$

Daraus folgt daß

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| = \prod_{l=1}^{n} a_l < \frac{\tau^n}{n^n} \,.$$

[Wir prüfen hier kurz, daß $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| = \prod_{l=1}^{n} a_l$. Wir berechnen:

$$\prod a_l = \prod_{i=1}^{s} |\sigma_i(\alpha)| \prod_{j=1}^{t} |\sigma_{s+j}(\alpha)|^2 \,.$$

Andererseits ist

$$|\sigma_{s+j}(\alpha)|^2 = |\sigma_{s+j}(\alpha)||\overline{\sigma_{s+j}(\alpha)}| \,,$$

so daß

$$\begin{aligned}
\prod a_l &= |\prod_{i=1}^{s} \sigma_i(\alpha) \prod_{j=1}^{t} \sigma_{s+j}(\alpha)\overline{\sigma}_{s+j}(\alpha)| \\
&= |\prod_{i=1}^{s} \sigma_i(\alpha) \prod_{j=1}^{t} \sigma_{s+j}(\alpha) \prod_{j=1}^{t} \overline{\sigma}_{s+j}(\alpha)| \\
&= |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)|
\end{aligned}$$

Weil $\sigma_1, \ldots, \sigma_s, \sigma_{s+1}, \bar{\sigma}_{s+1}, \ldots, \sigma_{s+t}, \bar{\sigma}_{s+t}$ alle Einbettungen über $\mathbb{Q}$ von L in $\mathbb{C}$ sind.]

• Zusammenfassung: für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{R}_+$, *wenn*

(1) $v(X_\tau) > 2^n v(T_{\sigma(\mathfrak{a})})$, *dann*

(2) $\exists 0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}$, so daß $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n}$.

• Anders formuliert (s. Bem. 24.2 und 24.3): für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{R}_+$, *wenn*

(1) $2^s(\frac{\pi}{2})^t \frac{\tau^n}{n!} > 2^n 2^{-t} N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$, *dann gilt*

(2) $\exists 0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}$, so daß $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n}$.

• Wir analysieren nun die Bedingung (1) genauer:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \tau^n > n! 2^{-s} 2^n 2^{-t} 2^t \pi^{-t} N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|} \\
&\Leftrightarrow \tau^n > n! 2^{n-s} \pi^{-t} N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|} \\
&\Leftrightarrow \tau^n > n! 2^{2t} \pi^{-t} N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}
\end{aligned}$$

• Wir haben bewiesen: für ein beliebiges $\tau \in \mathbb{R}_+$, *wenn*

(1) $\tau^n > n!(\frac{4}{\pi})^t N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$, *dann*

(2) $\exists 0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}$ so daß $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n}$.

• Für jedes τ wie in (1) definieren wir

$$A_\tau := \{0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}\,;\; |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n}\} \,.$$

Wegen (1) und (2) gelten folgende Eigenschaften (ÜA):

- $A_\tau \neq \varnothing$,
- $|A_\tau| < \infty$ (da $\sigma(\alpha) \in X_\tau \cap \sigma(\mathfrak{a})$),
- $\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow A_{\tau_1} \subseteq A_{\tau_2}$.

Aus diesen Eigenschaften folgern wir, daß

$$\bigcap_{\tau \in \mathbb{R}_+ \text{ , und } \tau \text{ erfüllt } (1)} A_\tau \neq \varnothing \,.$$

(Sei τ_0, so daß $|A_{\tau_0}| \leq |A_\tau|$ für alle τ, die (1) erfüllen. Dann ist $\cap A_\tau = A_{\tau_0} \neq \varnothing$).

• Sei nun $\alpha \in \cap A_\tau$. Wir behaupten, daß

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq c_L N(\mathfrak{a}) \quad .$$

In der Tat, da $0 \neq \alpha \in \cap A_\tau$ ist, gilt

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n} \,, \forall\, \tau \textbf{ die (1) erfüllen} \,.$$

Es folgt :

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq \inf_{\tau \textbf{ erfüllt (1)}} \{\frac{\tau^n}{n^n}\} = \frac{1}{n^n} \inf_{\tau \textbf{ erfüllt (1)}} \tau^n \,.$$

Nun ist aber

$$\inf_{\tau \textbf{ erfüllt (1)}} \tau^n = n!(\frac{4}{\pi})^t \sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}\, N(\mathfrak{a}) \,.$$

□

Kapitel 7: Die Einheitsgruppe $\mathcal{O}_L^\times$

Ansatz wie in der 20. Vorlesung (Erinnerung).

Satz 25.1 (Dirichletsche Einheitssatz)
$\mathcal{O}_L^\times$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit freiem Rang $s + t - 1$.

Beweis. Im Skript 26. □

Bemerkung 25.1
Aus D.E.S können wir folgern, daß

(i) $\mathcal{O}_L^\times = F \times (\mathcal{O}_L^\times)_{\text{tor}}$, F freie abelsche Gruppe vom Rang $s + t - 1$ (siehe [Algebra II ; Satz 6.2]).

(ii) Die Torsionsgruppe

$$(\mathcal{O}_L^\times)_{\text{tor}} = \{x \in \mathcal{O}_L \; ; \; \exists m \in \mathbb{N}, x^m = 1\}$$

besteht aus Einheitswurzeln in $\mathcal{O}_L^\times$, d.h.

$$(\mathcal{O}_L^\times)_{\text{tor}} = \mu(L) := \text{ die Gruppe der Einheitswurzeln in } L \,.$$

(iii) $\mathcal{O}_L^\times$ ist endlich erzeugt$\Rightarrow$ $(\mathcal{O}_L^\times)_{\text{tor}}$ ist endlich erzeugt, also ist $(\mathcal{O}_L^\times)_{\text{tor}}$ eine endliche Gruppe. Andererseits ist eine endliche Untergruppe von $L^\times$ zyklisch (siehe Algebra I), insbesondere ist $(\mathcal{O}_L^\times)_{\text{tor}}$ eine endliche zyklische Gruppe mit Erzeuger eine Einheitswurzel $\mu \in L^\times$.