B4: Algebraische Zahlentheorie
Sommersemester 2021
Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

27.Vorlesung

22. Juli 2021

Fortsetzung vom Skript 26. Um D.E.S. müssen wir nur noch zeigen daß:

$$\lambda(\mathcal{O}_L^\times) \subseteq H \text{ ein vollständiges Gitter ist.}$$

Es genügt dafür zu finden,

$$(*) \qquad \epsilon_1, \dots, \epsilon_{s+t-1} \in \mathcal{O}_L^\times \text{ so daß } \{\lambda(\epsilon_1), \dots, \lambda(\epsilon_{s+t-1})\} \qquad \mathbb{R}- \text{ linear unabhängig ist.}$$

Diese letzte Vorlesung hat als Hauptziel, die folgende Proposition 27.1 zu beweisen und daraus schließlich (∗) zu folgern.

Ansatz und Notationen wie in den 20-26 Vorlesungen. Wir werden, oft stillschweigend, die bisherige Ergebnisse aufrufen.

Proposition 27.1
$\exists \epsilon_1, \dots, \epsilon_{s+t-1} \in \mathcal{O}_L^\times$, so daß $|\sigma_l(\epsilon_k)| < 1$ für alle $l \neq k, l = 1, \dots, s+t, k = 1, \dots, s+t-1$.

Für den Beweis brauchen wir eine Vorbereitung:

Bemerkung 27.1
1. $L_\mathbb{R}$ ist nicht nur ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sondern auch eine $\mathbb{R}$-Algebra, versehen mit Komponentenweise Multiplikation.
2. Wir führen eine vorübergehende Terminologie ein.
   Für $x \in L_\mathbb{R}$ definiere die "Norm von x" wie folgt:
   $$N(x) := \prod_{i=1}^{s} x_i \prod_{j=1}^{t} x_{s+j}\bar{x}_{s+j} = \prod_{i=1}^{s} x_i \prod_{j=1}^{t} |x_{s+j}|^2 .$$
   Bemerke, daß $N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = N(\sigma(\alpha)) \quad \forall \alpha \in L$ (ÜA), dies begründet die Terminologie "Norm von x".
3. Unsere **Hauptbehauptung** nun ist:
   $$\exists c \in \mathbb{R}_+ \text{ so daß } \forall x \in L_\mathbb{R} \text{ mit } \frac{1}{2} \leq |N(x)| \leq 1, \exists \epsilon \in \mathcal{O}_L^\times, \text{ so daß } |x_l \sigma_l(\epsilon)| < c \quad \forall l = 1, \dots, s+t.$$
4. Bemerke, daß **Hauptbehauptung** $\Rightarrow$ Proposition 27.1:

Beweis. für jedes $k = 1, \dots, s+t-1$ wähle $x \in L_{\mathbb{R}}$ mit $|N(x)| = 1$ aber $|x_l| > c$ für $l \neq k$ (ausgleichen mit dem k-te Komponente). Unsere Hauptbehauptung liefert $\epsilon_k \in \mathcal{O}_L^\times$, so daß $|x_l \sigma_l(\epsilon_k)| < c \quad \forall l$. Insbesondere wenn $l \neq k$, ist $|\sigma_l(\epsilon_k)| < c/|x_l| < 1$ wie erwünscht. $\square$

Wir bemühen uns nun darum, die **Hauptbehauptung** zu beweisen. Wir wollen und werden dafür Minkowski's Satz anwenden. Dies benötigt einige technische Berechnungen.

• Da $\mathcal{O}_L \trianglelefteq \mathcal{O}_L$ ist, wissen wir, daß $\sigma(\mathcal{O}_L)$ ein vollständiges Gitter in $L_{\mathbb{R}}$ ist , also daß $x\sigma(\mathcal{O}_L)$ ein vollständiges Gitter für $x = (1, \dots, 1) \in L_{\mathbb{R}}$ ist. Allgemeiner für $x \in L_{\mathbb{R}}$ mit $N(x) \neq 0$, werden nun zeigen, daß $x\sigma(\mathcal{O}_L)$ ein vollständiges Gitter in $L_{\mathbb{R}}$ ist.

• Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis für $\mathcal{O}_L$. Also ist $\{\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)\}$ $\mathbb{R}$-linear unabhängig und

$$x\sigma(\mathcal{O}_L) = x\sigma(\alpha_1)\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus x\sigma(\alpha_n)\mathbb{Z} \, .$$

Wir behaupten: $\{x\sigma(\alpha_1), \dots, x\sigma(\alpha_n)\}$ ist $\mathbb{R}$-linear unabhängig. Dafür betrachten wir die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x\sigma(\alpha_1) \\ \vdots \\ x\sigma(\alpha_n) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Übliche Berechnungen ergeben, daß

$$|\det(A)| = 2^{-t} |\det \chi|$$

wobei χ die Matrix mit i-te Zeile gleich

$$x_1\sigma_1(\alpha_i) \dots x_s\sigma_s(\alpha_i) \quad x_{s+1}\sigma_{s+1}(\alpha_i) \quad \bar{x}_{s+1}\overline{\sigma_{s+1}(\alpha_i)} \dots$$

ist (ÜA).

• Wir müssen also $\det \chi$ berechnen. Jede Spalte hat einen gemeinsamen Faktor, und zwar entweder x_j oder $\bar{x}_j$. Wir sehen also, daß

$$\det \chi = N(x) \det \mathcal{V}$$

wobei wie üblich

$$\mathcal{V}_{ij} = \sigma_i(\alpha_j) \, ; \forall i, j = 1, \cdots, n \, .$$

Wir berechnen wie üblich

$$0 \neq |\det(A)| = 2^{-t} |N(x)| \sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$$

Also ist $x\sigma(\mathcal{O}_L)$ ein vollständiges Gitter, setze $T_x :=$ f.P von $x\sigma(\mathcal{O}_L)$. Wir berechnen wie üblich:

$$v(T_x) = |\det A| = 2^{-t} |N(x)| \sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|} \, .$$

(ÜA).

• Insbesondere wenn $\frac{1}{2} \leq |N(x)| \leq 1$, dann gilt, **unabhängig von** x, daß

$$(**) \qquad v(T_x) \leq 2^{-t} \sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$$

• Sei nun $X \subseteq L_{\mathbb{R}}$ konvex symmetrisch beschränkt, so daß

$$v(X) > 2^n 2^{-t} \sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$$

(z.B. $X = B_R(0)$ mit R groß genug)

- Sei $R \in \mathbb{R}_+$, so daß $|N(y)| < R \quad \forall y \in X$.
- Minkowski's Satz und $(**)$ ergeben (Minkowski's Satz für das Gitter $x\sigma(\mathcal{O}_L)$ und die Menge X anwenden):

$$(***) \qquad \forall x \in L_{\mathbb{R}} \text{ mit } \frac{1}{2} \leq |N(x)| \leq 1, \exists 0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_L, \text{ so daß } x\sigma(\alpha) \in X$$

- Betrachte nun

$$\mathcal{I} := \{\alpha\mathcal{O}_L \trianglelefteq \mathcal{O}_L \mid \exists x \in L_{\mathbb{R}}, \frac{1}{2} \leq |N(x)| \leq 1 \text{ und } x\sigma(\alpha) \in X\}$$

  Bemerke daß $\mathcal{I}$ ist wegen $(***)$ eine nicht leere Menge von Hauptidealen.
- Wir berechnen: $\alpha\mathcal{O}_L \in \mathcal{I} \Rightarrow \exists x \in L_{\mathbb{R}}$, so daß $\frac{1}{2} \leq |N(x)| \leq 1$
  $|N(x\sigma(\alpha))| < R \Rightarrow |N(x)||N(\sigma(\alpha))| < R \Rightarrow |N(\sigma(\alpha))| < R/\frac{1}{2} = 2R$
- Wir haben berechnet : $\forall \alpha\mathcal{O}_L \in \mathcal{I}$ gilt $N(\alpha\mathcal{O}_L) < 2R$.
- Also ist $\mathcal{I}$ eine endliche Menge, d.h. $\mathcal{I} = \{\beta_1\mathcal{O}_L, \ldots, \beta_m\mathcal{O}_L\}$, $\beta_k \neq 0$.
- Sein nun $x \in L_{\mathbb{R}}$ mit $\frac{1}{2} \leq |N(x)| \leq 1$. $(***)$ liefert $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_L$, so daß $\alpha\mathcal{O}_L \in \mathcal{I}$, d.h. $\exists k$, so daß $\alpha\mathcal{O}_L = \beta_k\mathcal{O}_L$.
- Setze $\epsilon = \alpha\beta_k^{-1}$. Dann ist $x\sigma(\epsilon) = \underbrace{x\sigma(\alpha)}_{\in X}\sigma(\beta_k^{-1}) \in \sigma(\beta_k^{-1})X$.
- Wir haben gezeigt:

$$\forall x \in L_{\mathbb{R}} \text{ mit } \frac{1}{2} \leq |N(x)| \leq 1, \exists \epsilon \in \mathcal{O}_L^{\times}, \text{ so daß } x\sigma(\epsilon) \in \bigcup_{k=1}^{m} \sigma(\beta_k^{-1})X\ .$$

- Da X beschränkt ist, so ist $\sigma(\beta_k^{-1})X \quad \forall k = 1, \ldots, m$.
- Es folgt: $\bigcup_{k=1}^{m} \sigma(\beta_k^{-1})X$ ist beschränkt.
- Endlich wählen wir eine Schranke c für diese beschränkte Menge. $\square$(Hauptbehauptung)

$\square$(Proposition 27.1).

Wir können nun schon Aufgrund von Proposition 27.1 den Beweis für D.E.S beenden: Seien $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{s+t-1}$ wie in Proposition 27.1. Wir zeigen:

$$(*) \qquad \{\lambda(\epsilon_1), \ldots, \lambda(\epsilon_{s+t-1})\} \text{ ist linear unabhängig.}$$

Betrachte die Matrix A mit (k,l)-tem Eintrag
$A_{k,l} := \log|\sigma_l(\epsilon_k)|$, $k = 1, \ldots, s+t-1$, $l = 1, \ldots, s+t-1$.
Um $(*)$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß A invertierbar ist. Durch elementare Spaltenumformungen (multipliziere die letzte $t-1$ Spalten mit 2) bekommen wie eine Matrix A' mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $A'_{kl} < 0$ für $k \neq l$

(weil $|\sigma_l(\epsilon_k)| < 1 \Rightarrow \log|\sigma_l(\epsilon_k)| < 0$.)

(ii) $\sum_l A'_{kl} > 0$

(weil $\sum_l A'_{kl} = \sum_{l=1}^{s} \log|\sigma_l(\epsilon_k)| + 2\sum_{l=s+1}^{s+t-1} \log|\sigma_l(\epsilon_k)| = -2\log|\sigma_{s+t}(\epsilon_k)|$, da $\lambda(\epsilon_k) \in H$. Nun ist aber $\log|\sigma_{s+t}(\epsilon_k)| < 0$, also $-2\log|\sigma_{s+t}(\epsilon_k)| > 0$.)

Zuletzt ist zu prüfen daß:

Hilfslemma
Sei A' eine $m \times m$ matrix, die die Eigenschaften (i)+(ii) erfüllt. Dann ist A' invertierbar.

Beweis. ÜA $\square$

Damit ist D.E.S bewiesen.